Una nota sulle attività di Risk e Capital Management di un intermediario bancario[1]

Rainer S. Masera
Luiss Guido Carli e Mercer Oliver Wyman (r.masera@rfi.it)
Giancarlo Mazzoni
Banca d'Italia e Università della Svizzera Italiana (giancarlo.mazzoni@lu.unisi.ch)

S O M M A R I O

Lo scopo di questo lavoro è quello di analizzare le strette interconnessioni tra l'attività di risk e capital management di un intermediario bancario. Verranno passate in rassegna le principali misure di rischio utilizzate nella gestione dei rischi di mercato. In merito ai rischi di credito, si studieranno le relazioni tra Expected Loss (EL) ed Unexpected Loss (UL), evidenziandone soprattutto i relativi riflessi in termini di pricing del credito. Si analizzeranno quindi le problematiche di capital structuring di un intermediario bancario nell'ambito di un semplice modello strutturale à la Merton, sottolineando l'importante ruolo svolto dalle nuove forme di finanziamento (ad esempio tramite i c.d. strumenti di contingent capital), rese disponibili dai significativi processi di innovazione finanziaria registrati negli ultimi decenni.

[1] Le idee espresse in questa nota sono attribuibili esclusivamente agli autori.

1. Cenni introduttivi

La gestione del rischio rappresenta la ragione fondamentale dell'operatività e dell'esistenza delle banche: "dominare il rischio in condizioni di asimmetria informativa rappresenta una delle funzioni fondamentali della banca, uno dei fili conduttori che permette di interpretarne evoluzione, cambiamenti e innovazioni" (Masera, 2005).

In termini definitori si può dire che il rischio rappresenta un evento aleatorio che caratterizza l'evoluzione di un dato fenomeno. Gli operatori bancari sono chiamati a fronteggiare e gestire diverse tipologie di rischio. In particolare, un'adeguata attività di *risk management* identifica, valuta e controlla le diverse tipologie di rischio, provvedendo, se necessario, alla loro sterilizzazione.

Da un punto di vista tassonomico si è soliti distinguere tra le seguenti tipologie di rischi:

- rischio di credito, derivante dall'insolvenza della controparte di un rapporto obbligazionario;
- rischio di mercato, legato alle variazioni sfavorevoli dei valori delle variabili di mercato (quali ad esempio tassi di interesse, tassi di cambio, titoli azionari);
- rischio operativo, definibile come il rischio di perdite derivanti da disfunzioni a livelli di procedure, personale e sistemi interni, oppure da eventi esogeni. Tale definizione include il rischio giuridico, ma non quelli strategici e reputazionali;
- rischio di liquidità, legato alla difficoltà di smobilizzo di una posizione in tempi brevi;
- rischio di controparte, derivante dall'insolvenza della controparte di un contratto finanziario (configurandosi quindi come una particolare tipologia di rischio di credito che dipende dall'evoluzione delle variabili di mercato);
- rischio di *business*, definibile come la volatilità dei profitti dovuta a cambiamenti dei volumi, margini o costi;
- rischio assicurativo, identificabile nella volatilità degli indennizzi da erogare a fronte di sinistri o di maturazione di rendite.

Gli ultimi decenni sono stati caratterizzati da un significativo affinamento delle tecniche di modellizzazione e gestione dei rischi, sia per fini gestionali interni che per finalità regolamentari. Tra le ragioni di tale fenomeno possono essere ricordate: a) l'accresciuta importanza riconosciuta all'attività di *risk management*, b) il processo di deregolamentazione che ha incoraggiato l'assunzione dei rischi, c) i progressi tecnico-scientifici che hanno facilitato l'attività di stima e previsione dei rischi.

Negli ultimi anni si tende ad attribuire sempre più importanza alla gestione dei rischi non solo all'interno delle organizzazioni finanziarie e bancarie, ma in genere nell'ambito delle imprese medio-grandi. Basilea II, in un gioco reciproco di cause ed effetti, si allinea a questa tendenza e, al contempo, la esalta. In tale contesto si è assunta, tra l'altro, maggiore consapevolezza della necessità di adottare modelli di gestione integrata del rischio (*enterprise risk management*, ERM) sostituendoli ad impostazioni meno coordinate[2].

---

[2] Cfr., Associazione Italiana Internal Auditors, Il ruolo dell'*Internal Auditing nell'Enterpise Risk Management,* settembre 2004. In tale documento, peraltro, sono riportati sia i vantaggi legati all'adozione dell'ERM, sia le attività del processo di ERM. Queste ultime consistono nell'"articolare e comunicare gli obiettivi dell'organizzazione; determinare la propensione al rischio dell'organizzazione; creare un adeguato ambiente interno

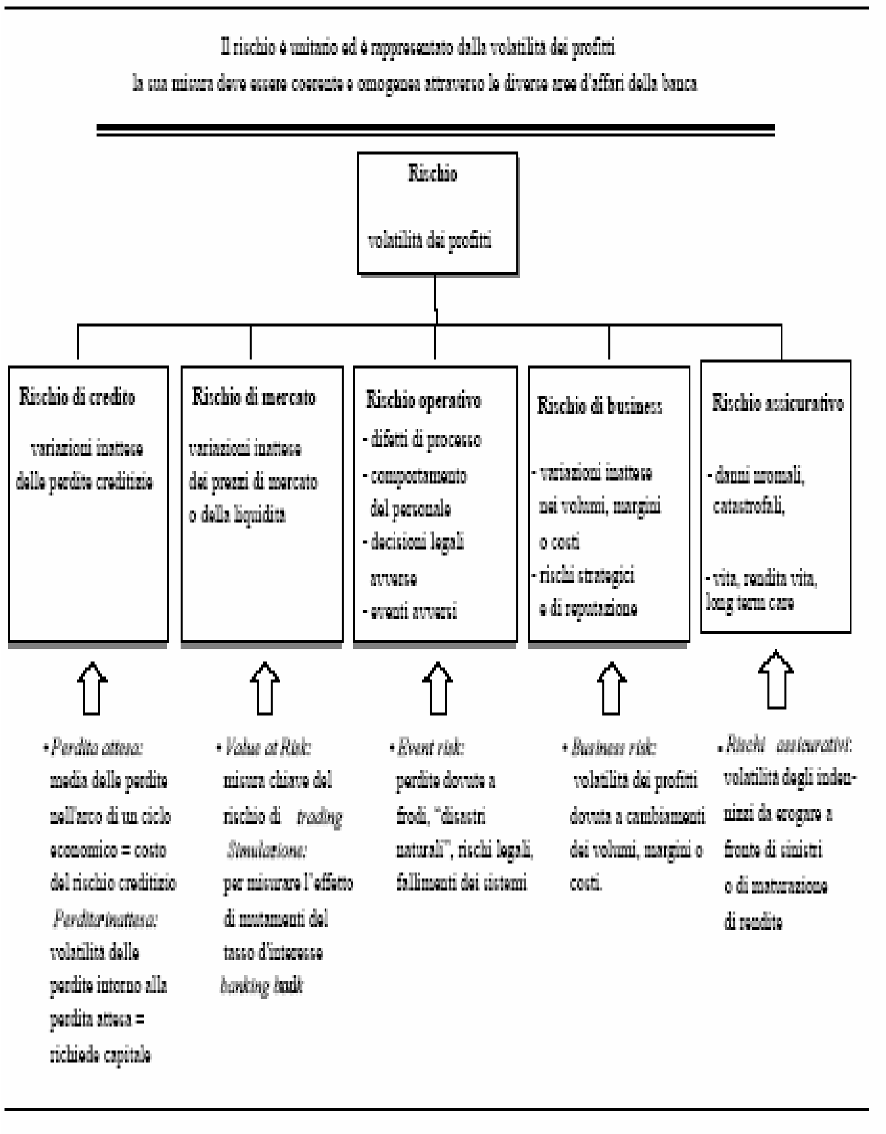
L'ERM è stato recentemente definito come "*a process, effected by an entity's board of directors, management and other personnel, applied in strategy setting and across the enterprise, designed to identify potential events that may affect the entity, and manage risk to be within its risk appetite, to provide reasonable assurance regarding the achievement of entity objectives*"[3].

L'ERM viene, quindi concepito come un approccio metodologico strutturato che, attraverso l'individuazione dei rischi interni ed esterni (rischi finanziari; strategici; operativi; reputazionali; di *compliance* alla normativa e ai regolamenti; ecc.) alla società suscettibili di produrre danni o perdite, permette una maggiore consapevolezza nell'assunzione delle decisioni del *management* facilitando, quindi, il raggiungimento degli obiettivi aziendali e, in ultima istanza, la creazione di valore per azionisti e altri *stakeholder* dell'impresa. Si tratta, quindi, dell'evoluzione dei processi aziendali di pianificazione strategica.

capace di comprendere e adottare un modello di riferimento per la gestione dei rischi; individuare le minacce potenziali che si frappongono al raggiungimento degli obiettivi; valutare il rischio, cioè l'impatto e la probabilità che si verifichi una minaccia; identificare e implementare le azioni di risposta ai rischi; intraprendere attività di controllo e altre azioni di contrasto; comunicare le informazioni sui rischi in modo coerente a tutti i livelli dell'organizzazione; monitorare e coordinare centralmente i processi di gestione dei rischi e risultati ottenuti; fornire assurance sull'efficacia del sistema di gestione dei rischi".

3 Cfr. *Enterprise Risk Management –Integrated Framework: Executive Summary, Committe of Sponsoring Organizations of the Treadway Commission (COSO), September* 2004, pag.2 . In tale documento si sottolinea, tra l'altro come l'ERM si compone di otto elementi correlati: 1. *Internal Enviroment*: comprende i valori aziendali, le competenze, lo stile manageriale, le responsabilità; 2. *Objective Setting*: gli obiettivi aziendali devono essere chiari e condivisi e possono essere classificati come: strategici, che si riferiscono, cioè, alla *mission* aziendale; operativi, che si riferiscono, cioè all'efficacia ed efficienza; di *reporting*, che si riferiscono, cioè, alla qualità e correttezza delle informazioni finanziarie o meno che l'azienda offre al mercato, agli azionisti, ai dipendenti, ai fornitori; di conformità, cioè al rispetto delle leggi e di regolamenti di mercato; 3. *Event Identification*: è la corretta identificazione di rischi ed opportunità; 4. *Risk Assessment*: i rischi devono essere analizzati e classificati dal punto di vista della probabilità di accadimento e del danno o impatto ipotizzabile al fine di decidere come gestirli; i rischi, inoltre, devono essere gestiti sia come rischi potenziali che come rischi effettivi; 5. *Risk Response*: dopo aver classificato i rischi, devono essere decise le possibili azioni di contenimento o contrasto (evitare, accettare, ridurre o condividere il rischio) sulla base della tolleranza accettabile e della propensione al rischio dell'azienda; 6. *Control Activities*: occorre stabilire e rendere pubbliche le opportune politiche e procedure per far si che il "*risk response*" sia effettivo; 7. *Information and Communication*: le informazioni più importanti devono essere identificate, registrate e communicate nei modi e nei tempi necessari per rendere il personale cosciente e responsabile dei propri compiti; 8. *Monitoring*: l'intero processo di ERM deve essere continuamente monitorato al fine di permettere, se necessario, di operare delle correzioni.
La traduzione in italiano è tratta dal sito http://www.isacaroma.it/html/newsletter/?q=node/12.

Principali tipologie di rischio bancario



Con riferimento al settore bancario, si pone sempre più l'accento sull'importanza per le banche di gestire efficacemente le varie tipologie di rischio connesse alle loro attività. La gestione e, quindi, la misurazione e il controllo del rischio rappresentano per le banche elementi cardine del loro operato e "motore del profitto". "La diversificazione per attività, prodotti e servizi richiede una gestione unitaria del rischio complessivo, pur nella consapevolezza che esso proviene da fonti differenti e lungo line di *business* articolate. *Risk, capital, value based management* sono tre aspetti di una comune realtà: l'innovazione tecnologica e finanziaria consente oggi sia di modellare il rischio nelle sue diverse accezioni, sia di calcolare il fabbisogno del capitale (capitale economico) per far fronte alle perdite inattese connesse all'operatività della banca"[4].

Basilea II sollecita di fatto le banche e i gruppi finanziari a passare dall'ERM all'ERS (*enterprise risk strategy*). Si tratta, cioè, di passare dalla misurazione e valutazione delle diverse

4 Vedi R. Masera, Rischio, banche imprese, cit., pag. XIV, nonché cap. 2 e 4.

tipologie di rischio all'implementazione di una strategia d'impresa volta ad analizzare e gestire il rischio nelle sue diverse manifestazioni.

Dalla mappatura dei rischi e dalla misurazione del capitale appropriato per fronteggiarli si perviene alla costruzione di processi dinamici di retroazione e riallineamento rispetto alle risposte al rischio. I modelli di misurazione e gestione del rischio sono in particolare applicati all'analisi di tutti i principali progetti di investimento: quelli tradizionali, quelli in innovazione e sviluppo, quelli rivolti ad acquisizioni e fusioni (M&A), anche con metodologie innovative, quali l'approccio delle operazioni reali[5].

2. Le diverse misure di rischio: l'applicazione ai rischi di mercato

Sia gli accademici che l'industria finanziaria hanno proposto diverse definizioni e misure di rischio. Si possono pertanto identificare almeno tre diversi indicatori di rischio: a) volatilità, b) *Value at Risk* (VaR), c) misure di rischio coerenti.

Nonostante il diverso livello di complessità, tutte queste misure definiscono il rischio, nelle sue diverse tipologie, in termini probabilistici, consentendo dunque anche una sua quantificazione. In termini analitici, si può dire che le diverse tipologie di rischio costituiscono una serie di variabili casuali le cui realizzazioni sono rappresentate dai possibili valori futuri di una singola posizione (o di un portafoglio di posizioni) soggette a una data tipologia di rischio.

2.1 Volatilità

Come già ricordato nelle considerazioni introduttive le diverse tipologie di rischio sono per loro natura caratterizzate dall'aleatorietà. Per modellare un dato fenomeno stocastico occorre quindi concentrarsi innanzitutto sull'analisi della sua variabilità.

Al fine di rendere "operativo" il concetto di volatilità occorre utilizzare dei modelli che ne consentano una stima attendibile alla luce dell'evidenza empirica fornita dalle serie storiche finanziarie.

Data una attività finanziaria (S_t) e avendo a disposizione una serie storica di n rendimenti (r_t):

$$[1] \qquad r_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right);$$

il più semplice indicatore di volatilità è costituito dallo stimatore campionario della sua *standard deviation*, vale a dire:

$$[2] \qquad \hat{\sigma}_t = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(r_{i-i} - \bar{r}\right)^2};$$

dove $\bar{r}$ $\left(\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i\right)$ rappresenta la media campionaria dei rendimenti.

5 Per una rassegna, Cfr., ad esempio, M. Dallocchio e A. Salvi, Finanza d'azienda, Egea, Milano, 2004, cap.16, pag. 421 e ss.

Questa misura di volatilità si dimostra però non adatta a riflettere le principali caratteristiche evidenziate dalle serie storiche finanziarie visto che: a) la correlazione dei rendimenti con i loro ritardi (autocorrelazione) è molto debole, b) la serie dei rendimenti al quadrato presenta invece forte autocorrelazione, c) i periodi di alta/bassa volatilità tendono a persistere nel tempo (c.d. *volatility clustering effect*), d) i rendimenti non hanno una distribuzione normale, ma leptocurtica.

Un metodo di calcolo della volatilità più dinamico rispetto alla varianza campionaria è quello di prevedere una c.d. *moving window*, cioè una finestra di dati storici che scorra nel tempo. In particolare, scindendo il numero di osservazioni (n) in tanti sottoperiodi di ampiezza τ e ogni volta, aggiungendo un'osservazione più recente ed eliminandone una più vecchia, si calcola la deviazione standard. Formalmente possiamo scrivere:

$$[3] \qquad \hat{\sigma}_t = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{i=t-\tau-1}^{t} \left(r_{i-1} - \bar{r}_t \right)^2} \; ;$$

dove: $\bar{r}_t = \frac{1}{\tau} \sum_i r_i$.

Un tale approccio, sebbene di semplice applicazione, non considera, a differenza di quanto dimostrato dall'evidenza empirica, l'ordine temporale dei rendimenti dando uguale peso a tutte le osservazioni, più o meno recenti.

L'esigenza di ponderare diversamente le osservazioni trova applicazione nell'utilizzo dei c.d. modelli EWMA (*Exponential Weighting Moving Average*), che danno un peso decrescente alle osservazioni più lontane nel tempo. In particolare, nel modello in questione i pesi diminuiscono esponenzialmente sulla base di un fattore di decadimento temporale (*decay factor*) costante (λ), che indica la persistenza delle osservazioni campionarie passate. Per un numero di osservazioni (n) che tende a infinito l'EWMA dei rendimenti può essere formalmente definito come:

$$[4] \qquad \sigma_t = \sqrt{(1-\lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} r_{t-1}^2} \; ;$$

si nota facilmente che l'EWMA si discosta tanto più dalla media mobile semplice quanto più si sceglie un valore di λ diverso da 1.

A fini implementativi i maggiori problemi che si incontrano per questo modello risiedono nella scelta sia del *decay factor* λ, sia del numero di osservazioni passate da includere nel calcolo della media. Ovviamente λ va scelto in considerazione della velocità con cui i rendimenti variano nel tempo. La scelta del numero di osservazioni dovrebbe invece dipendere dall'*holding period* della posizione di cui si vuole calcolare la rischiosità.

Una classe di modelli più sofisticati per la stima della volatilità è rappresentata dai c.d. modelli ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*). In particolare, tali modelli risultano adeguati nel descrivere il citato fenomeno empirico del *volatility clustering*.

I modelli ARCH prevedono che i rendimenti r_t possono essere descritti come:

$$[5] \qquad r_t = \varepsilon_t \; ;$$

con:

$$[6] \qquad \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \; ;$$

e η_t che si distribuisce come una normale standardizzata (in termini formali: $\eta_t \sim N(0,1)$). Ne segue pertanto che r_t, dato il set informativo disponibile al tempo t-1 (Φ_{t-1}), si distribuisce come una normale con media 0 e varianza σ_t^2 (in termini formali: $r_t \mid \Phi_{t-1} \sim N(0,\sigma_t^2)$).

In particolare, va osservato che i modelli ARCH(p), proposti da Engle (1982), ipotizzano l'esistenza di una varianza di lungo periodo V cui viene assegnato un peso γ e modellano la dipendenza tra la varianza condizionale e i p quadrati dei rendimenti passati[6] come:

[7] $$\sigma_t^2 = \gamma V + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

con:

[8] $$\gamma + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1 .$$

Un'estensione dei modelli ARCH è rappresentata dal modello GARCH(p,q) (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) di Bollerslev (1986). Tale generalizzazione rende il modello più flessibile, in quanto si prevede che la varianza condizionale dipenda dalle p più recenti osservazioni di r e dalle q più recenti stime della varianza:

[9] $$\sigma_t^2 = \gamma V + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{j-i}^2 .$$

In tal modo si cerca da un lato di cogliere gli effetti di breve termine legati all'evoluzione della variabile considerata, dall'altro invece si cerca di catturare gli effetti di lungo periodo, legati alla persistenza della volatilità.

I dati storici tuttavia non producono sempre le migliori previsioni relativamente ai rischi futuri a causa ad esempio delle modificazioni strutturali dei mercati o, ancora, a causa di altri eventi insoliti e rilevanti spesso non riflessi nei dati storici recenti.

Un'alternativa ai modelli di stima storica della volatilità è quindi rappresentata dalla c.d. *implied volatility* degli strumenti opzionali. In particolare, se i mercati delle opzioni sono efficienti, la volatilità implicita costituisce un'ottima stima della volatilità futura, esprimendo il consenso del mercato sugli andamenti futuri. La volatilità implicita consente un rapido aggiornamento delle previsioni in risposta alle aspettative di mercato, differenziandosi sostanzialmente dai modelli precedenti.

Va tuttavia osservato che il calcolo dell'*implied volatility* è subordinato all'esistenza di un contratto opzionale che abbia come *underlying* lo strumento di cui si intende prevedere la volatilità del rendimento. Ulteriori problemi sono anche legati al c.d. fenomeno del *volatility smile* in base al quale le opzioni *at-the-money* hanno valori di volatilità implicita più bassi rispetto alle opzioni *out-of-the-money* o *in-the-money.*

6 Le condizioni di regolarità del processo richiedono che $\alpha_i > 0$ per i=1,2….p. Inoltre, la condizione di stazionarietà della covarianza, che assicura un $\sigma^2 > 0$ è soddisfatta se e solo se $\sum \alpha_i < 1$.

2.2 Value at Risk (VaR)

Tra le diverse misure di rischio quella maggiormente utilizzata, specie per i rischi di mercato, è rappresentata dal *Value at Risk* (VaR). Il VaR rappresenta la massima perdita attesa di un portafoglio in un determinato orizzonte temporale con un certo intervallo di confidenza. Si evince pertanto che i due elementi caratterizzanti del VaR, insiti nella sua stessa definizione, sono l'intervallo di tempo, *dt*, cui la massima perdita attesa si riferisce, e l'intervallo di confidenza, α, vale a dire la percentuale di errore del VaR che si è disposti a sopportare.

Possono essere identificati almeno tre diversi approcci per il calcolo del VaR:

- gli approcci parametrici: in cui si assume di conoscere a priori le distribuzioni di probabilità dei diversi fattori di rischio (tra i principali ricordiamo i modelli *portfolio-normal, asset-normal* e *delta-gamma normal*);
- gli approcci simulativi di tipo Monte Carlo in cui si generano i possibili sentieri temporali seguiti dai diversi fattori di rischio (anche in questo caso comunque viene ipotizzata una forma parametrica ex-ante per la distribuzione dei rendimenti);
- gli approcci simulativi storici in cui i possibili sentieri futuri seguiti dai fattori di rischio sono generati sulla base delle osservazioni storiche.

2.2.a1 Approcci parametrici: modelli portfolio-normal e asset-normal

Il modello *portfolio-normal* ipotizza che i rendimenti giornalieri del portafoglio (R), considerato nel suo complesso, siano indipendentemente e identicamente distribuiti secondo una Normale con media μ_R e deviazione standard giornaliera, σ_R.

Data quindi una generica posizione di valore W, su un dato portafoglio, il VaR per un generico orizzonte temporale dt con un intervallo di confidenza α sarà pari a:

[10] $$VaR(dt,\alpha) = W \times (\sigma_R \times \varepsilon_\alpha - \mu_R);$$

dove: $\Pr ob(-\varepsilon_\alpha \leq \varepsilon) = \alpha$.

Il VaR viene spesso calcolato anche su un orizzonte temporale più lungo rispetto a quello giornaliero. Per convertire la volatilità giornaliera nella volatilità relativa a un intervallo di tempo differente viene generalmente utilizzata l'ipotesi che la varianza evolve linearmente nel tempo; data quindi la volatilità giornaliera, σ_d, la volatilità annua, σ_y, sarà pari a:

[11] $$\sigma_Y = \sigma_d \times \sqrt{252};$$

dove 252 rappresenta convenzionalmente il numero di giorni lavorativi in un anno.

L'approccio *portfolio-normal* si basa sulla non trascurabile semplificazione di modellare la variabilità del portafoglio nel suo complesso, trascurando quindi l'effetto diversificazione tra i diversi titoli che lo compongono.

Tale limite è superato dal c.d. approccio *asset-normal*, in base al quale si ipotizza che in un portafoglio composto da n attività, i rendimenti di ciascun titolo siano normalmente distribuiti. In questo ambito la media μ_P e la varianza del portafoglio, σ_P, saranno pari rispettivamente a:

[12]
$$\mu_P = \sum_{i=1}^{n} w_i \, \mu_i \, ;$$
$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} w_i \, w_j \, \rho_{ij} \sigma_i \, \sigma_j} \, ;$$

dove $w_i = \dfrac{S_i}{W}$, μ_i e σ_i rappresentano rispettivamente la media e deviazione standard dei rendimenti del titolo i-esimo, S_i l'ammontare investito nel titolo i-esimo, mentre ρ_{ij} indica la correlazione tra i rendimenti del titolo i-esimo e quelli del titolo j-esimo.

Data quindi una generica posizione di valore W, su un dato portafoglio, il VaR per un generico orizzonte temporale dt con un intervallo di confidenza α sarà pari, in questo caso a:

[13]
$$VaR(dt,\alpha) = W \times (\sigma_p \times \varepsilon_\alpha - \mu_p) = W \times \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} w_i \, w_j \, \rho_{ij} \sigma_i \, \sigma_j} \times \varepsilon_\alpha - \sum_{i=1}^{n} w_i \, \mu_i \right)$$

Le ipotesi sottostanti l'approccio *asset (portfolio)-normal* spesso non trovano conferma nell'evidenza empirica che, come detto, si caratterizza per la presenza di distribuzioni *fat-tailed*. L'ipotizzare variabili normali può quindi portare alla sottostima degli eventi estremi e quindi alla sottostima del VaR. Una possibile soluzione potrebbe essere rappresentata dal modellare i vari fattori di rischio come variabili casuali caratterizzate da distribuzioni di probabilità con code più spesse (si pensi ad esempio alla t di Student).

2.2.a2 Approcci parametrici: modelli delta normal e delta-gamma normal

Si consideri un portafoglio di valore W che dipende da n fattori di rischio S_i:

[14]
$$W = W(S_1, S_2, \ldots S_{n-1}, S_n);$$

la sensitività di primo ordine del portafoglio rispetto al generico fattore di rischio i-esimo, S_i, è pari a:

[15]
$$\Delta_i \equiv \frac{\partial W(S_1, S_2, \ldots S_{n-1}, S_n)}{\partial S_i};$$

la variazione di valore del portafoglio può pertanto essere approssimata (attraverso un'espansione in serie di Taylor ferma ai termini di primo ordine) come:

[16]
$$dW \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial S_i} dS_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i dS_i \, ;$$

possiamo pertanto scrivere:

[17]
$$\frac{dW}{W} \approx \frac{1}{W} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i dS_i = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta_i dR_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dR_i \, ;$$

dove

[18]
$$\alpha_i = w_i \Delta_i \, ;$$

e

$$[19] \qquad dR_i = \frac{dS_i}{S_i};$$

R_i si ipotizza che si distribuisca come una $N(0,\sigma_t^2)$. Si evince pertanto che la varianza di $\frac{dW}{W}$ sarà rappresentata da:

$$[20] \qquad \sigma_{\frac{dW}{W}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \alpha_i \alpha_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j} \ .$$

Possiamo quindi concludere che il VaR del portafoglio W per un orizzonte temporale dt e un intervallo di confidenza α sarà pertanto dato da:

$$[21] \, VaR(dt,\alpha) = W \times \sigma_{\frac{dW}{W}} \times \varepsilon_\alpha = W \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \alpha_i \alpha_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j} \times \varepsilon_\alpha$$

L'approccio appena presentato, il c.d. approccio *delta normal*, si fonda sull'assunzione di relazioni lineari tra i diversi fattori di rischio e le variazioni di valore del portafoglio. L'ipotesi di linearità del modello è applicabile a portafogli di titoli azionari, obbligazioni, *forward, swap* e in genere strumenti lineari.

Quando invece ci si trova in presenza di strumenti non lineari, come ad esempio i contratti opzionali, le approssimazioni lineari (come quella rappresentata dalla [16]) evidenziano dei rilevanti limiti. I modelli *delta-gamma normal* superano questi limiti considerando anche le sensitività di secondo ordine, il c.d. gamma, rispetto ai diversi fattori di rischio. La sensitività di secondo ordine del portafoglio rispetto al generico fattore di rischio i-esimo, S_i, è pari a:

$$[22] \qquad \Gamma_i \equiv \frac{\partial^2 W(S_1, S_2, \ldots S_{n-1}, S_n)}{\partial S_i^{\,2}};$$

in questo contesto quindi la variazione di valore del portafoglio può essere approssimata (attraverso un'espansione in serie di Taylor ferma ai termini di secondo ordine[7]) come:

$$[23] \, dW \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial S_i} dS_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 W}{\partial S_i^{\,2}} (dS_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i dS_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Gamma_i (dS_i)^2 \ ;$$

possiamo pertanto scrivere:

$$[24] \quad \begin{aligned} \frac{dW}{W} &\approx \frac{1}{W}\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta_i dS_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Gamma_i (dS_i)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta_i dR_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i S_i \Gamma_i (dR_i)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dR_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \beta_i (dR_i)^2 \end{aligned}$$

dove:

$$[25] \qquad \beta_i = w_i S_i \Gamma_i \, .$$

7 Non vengono considerate, per non complicare eccessivamente l'analisi, le derivate di secondo ordine incrociate, c.d. *cross-gamma*.

Un'attenta analisi della [24] evidenzia che anche nel caso in cui si continui a ipotizzare che i rendimenti R_i si distribuiscano come delle $N(0,\sigma_t^2)$, le variazioni di valore percentuali del portafoglio $\frac{dW}{W}$ non saranno più normali e quindi si rende necessario il calcolo dei quantili secondo questa nuova distribuzione: un'approssimazione in genere utilizzata è costituita dalla c.d. espansione di Cornish-Fisher che utilizza i momenti fino al terzo ordine.

2.2.b Approcci simulativi di tipo Monte Carlo

Alla base del metodo Monte Carlo (Boyle, 1977) c'è la simulazione dei possibili *paths* dei prezzi degli strumenti finanziari analizzati. In particolare, con un numero sufficiente di simulazioni la distribuzione ottenuta convergerà verso la distribuzione "vera" del prezzo delle diverse attività e quindi del portafoglio, consentendo infine il calcolo del VaR.

I passi logici che si seguono nell'implementazione del metodo Mone Carlo possono essere così sintetizzati:

- scelta del modello generatore dei prezzi delle diverse attività;
- stima dei parametri del modello scelto secondo le evidenze storiche disponibili;
- generazione dei diversi *paths* fittizi simulando diversi valori per le variabili casuali incluse nel modello di prezzo;
- ogni serie di numeri casuali produce un ipotetico valore finale per ciascun strumento desiderato, e quindi un valore finale per il portafoglio detenuto;
- calcolo del VaR sulla base della distribuzione simulata.

Questo approccio risulta essere particolarmente flessibile consentendo la gestione di qualsiasi tipo di portafoglio, permettendo: a) il calcolo del VaR in situazioni non lineari, b) la modellizzazione di parametri di prezzo *path-dependent*, c) la valutazione di derivati molto complessi per cui non esistono formule analitiche.

Per i prezzi delle azioni, delle valute e delle *commodities* il modello generatore di prezzo utilizzato più frequentemente è un moto geometrico browniano:

[26] $$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz_t;$$

dove $dz_t = \varepsilon_t \sqrt{dt}$.

Le simulazioni Monte Carlo dipendono, per le diverse estrazioni, da un generatore di numeri casuali. Va peraltro rimarcato che questi numeri sono in realtà pseudo casuali, poiché generati da un algoritmo che utilizza una routine deterministica. L'algoritmo di calcolo produce quindi una sorta di ciclicità: la serie di estrazioni parte cioè da un valore iniziale e vi ritorna dopo un ciclo. Un generatore è tanto più efficiente quanto più è lontana la ripetizione di due cicli identici.

In molte applicazioni l'accuratezza di ciascun parametro stimato è proporzionale a $1/\sqrt{n}$, dove n è il numero di simulazioni. E' possibile tuttavia ottenere dei miglioramenti di stima e/o velocità attraverso l'utilizzo di tecniche di riduzione della varianza come ad esempio: a) variabile antitetica, b) *control variates* e c) *importance sampling*.

2.2.c Approcci simulativi storici

Il metodo della simulazione storica è un approccio non parametrico che calcola il VaR non avanzando ex-ante nessuna ipotesi probabilistica sulle variabili in oggetto di analisi, basandosi invece sulla distribuzione storica dei rendimenti.

Ad esempio, dato un portafoglio di titoli azionari del quale si vuole calcolare il VaR giornaliero, si raccolgono i rendimenti storici delle azioni in portafoglio. Partendo dal prezzo odierno si ipotizza che nel giorno seguente si realizzi, per ciascun titolo azionario, il primo rendimento osservato nella serie storica. Si procede poi a calcolare il valore che assumerebbe il portafoglio in base a questi ipotetici valori delle azioni che lo compongono: si è generato così il primo scenario. Poi la procedura si ripete partendo sempre dal prezzo odierno e ipotizzando che nel giorno successivo si realizzi, per ciascuna azione, il secondo rendimento osservato nella serie storica; si valuta quindi il portafoglio in base a questi nuovi valori ottenendo il secondo scenario. E così via. Una volta arrivati all'ultimo giorno del campione si è ottenuta la serie dei percorsi di rendimento giornalieri che determinano ciascuno un ipotetico valore del portafoglio che sono alla base del VaR quale che sia l'intervallo di confidenza prescelto.

Questo approccio ha il vantaggio di riflettere la distribuzione empirica dei rendimenti, mantenendo al tempo stesso la correlazione tra le singole azioni che compongono il portafoglio. Il limite maggiore va invece rinvenuto nel fatto che il numero di percorsi simulati è vincolato al numero di osservazioni disponibili.

2.3 Limiti del VaR e misure di rischio coerenti (cenni)

Il c.d. approccio assiomatico delle misure di rischio coerenti, introdotto da Artzner et al. (1999), pone l'attenzione sui limiti del VaR mostrando che questa misura, che rappresenta lo standard comunemente accettato sia dagli operatori di mercato sia dalle Autorità di Vigilanza, è un indicatore del rischio non coerente. I due limiti principali del VaR che vengono identificati sono: a) la sua "*non smoothness*" (cioè gli eventi al di sotto del quantile prescelto non vengono affatto considerati), b) la sua assenza di subadditività (cioè il VaR di un portafoglio diversificato può essere maggiore dei singoli VaR individuali calcolati per i diversi fattori di rischio. Intuitivamente può essere detto che il VaR non tiene conto dell'intera coda sinistra della distribuzione del P&L di una data posizione, selezionando un unico punto (cioè il quantile prescelto).

Per superare questi limiti sono state proposte misure di rischio alternativo che tengono conto della coda sinistra della distribuzione dei rendimenti, soddisfacendo al tempo stesso la menzionata proprietà di subadditività dell'indicatore di rischio. Tra queste misure probabilmente l'*Expected Shortfall* (ES) è la più conosciuta. Questo indicatore misura la perdita attesa condizionata all'evento che il limite del VaR sia stato violato. Va peraltro rimarcato che i vantaggi teorici dell'indicatore in discorso si scontrano con i problemi che si fronteggiano per una sua implementazione. E' stato infatti dimostrato che per poter effettuare esercizi di *back-testing* l'ES richiede molti più dati del VaR.

3. Rischio di credito[8]

Il rischio di credito è connesso alla probabilità che la controparte di un contratto di prestito non sia in grado di far fronte agli obblighi di servizio del debito.

8 Vedi R. Masera, Rischio, banche, imprese Il Sole24 Ore, 2005.

L'elemento di partenza per la quantificazione del rischio di credito sta nella stima della «probabilità di inadempienza» (*probability of default*, ovvero PD), della controparte creditizia. Fortunatamente, escludendo il settore delle microimprese, l'inadempienza creditizia rappresenta un evento relativamente raro; sotto il profilo del calcolo delle probabilità ciò rende peraltro tecnicamente complesso discriminare ex ante le imprese che faranno *default* dalle altre.

Si osservi ancora che il rischio di credito è di fatto collegato alle specifiche condizioni del contratto che contribuiscono a determinare il tasso di recupero atteso, nel caso di inadempienza. Occorre sottolineare che le perdite subite dal creditore sono comunque, in generale, significative. Ad esempio, nel caso di società quotate, i valori medi dei coefficienti di perdita nel caso di inadempienza per obbligazioni *senior secured, junior* e subordinate sono rispettivamente dell'ordine del 50%, 70% e 80%.

Questa considerazione induce ad esaminare con attenzione la natura del contratto creditizio che, come è assolutamente evidente, comporta risultati fortemente asimmetrici per il creditore. Nel caso di buon esito dell'operazione infatti il creditore verrà rimborsato dell'ammontare del prestito e riceverà gli interessi pattuiti. Nel caso, invece, di *default* il creditore incorrerà in perdite rilevanti che, anche se coperte da garanzie reali, possono ammontare almeno a qualche multiplo degli interessi pattuiti.

Questo fatto è ben noto agli operatori del mercato obbligazionario che, dovendo operare con portafogli non sempre perfettamente diversificati, sono esposti a significative perdite in caso di *default*. Anche un solo evento di *distress* finanziario che colpisca una delle posizioni nel loro portafoglio può vanificare i guadagni di *trading* e di incasso cedolare dell'intero esercizio. Per tale ragione il mercato obbligazionario reagisce assai nervosamente alle notizie che possono sottendere peggioramenti della qualità creditizia delle controparti emittenti, con repentini *flights* (ovvero vendita dei titoli di peggiore qualità creditizia ed acquisto di quelli a migliore qualità) che possono generare forte volatilità dei prezzi.

È dunque evidente che qualsiasi strategia di forte concentrazione dei rischi di credito - e, quindi, di detenzione di obbligazioni ad alto rischio – è comunque sbagliata a causa dell'intrinseca asimmetria degli esiti economici del contratto creditizio. Diversamente dalle azioni, il debito ha un potenziale di apprezzamento limitato. Le considerazioni generali che inducono a gestire il rischio di inadempienza attraverso portafogli di credito diversificati sono ancora più rilevanti e cogenti. Il rischio di inadempienza creditizia, come altre tipologie di eventi rari, con costi elevati, può essere efficacemente gestito soltanto attraverso portafogli ampi e diversificati.

Il problema della misurazione della probabilità di inadempienza non ha soluzione univoca né, comunque, risposte chiaramente differenziate per qualità e affidabilità.

È utile affrontare la questione partendo dal seguente quesito: quali sono le fonti e le tipologie di informazioni utili per stimare la probabilità di inadempienza di un'impresa? La teoria economica ha affrontato in diverse circostanze il problema della spiegazione degli eventi di dissesto finanziario e (aspetto direttamente speculare) della struttura finanziaria efficiente dell'impresa. Si possono ricordare a tal proposito i contributi fondamentali di Modigliani e Miller, di Wilcox nonché di Merton che ha aperto la strada verso lo studio della finanza d'impresa secondo una prospettiva di *contingent claim analysis*.

Prescindendo dai punti di vista teorici, al fine di formulare un giudizio di sostenibilità del debito e di esposizione ai rischi di illiquidità ed insolvenza, i principali elementi che si devono prendere in considerazione appaiono facilmente individuabili.

1) È evidente che i rendiconti finanziari - stato patrimoniale e conto economico - contengono una serie di dati utili a valutare la capacità dell'impresa a sopravvivere alla competizione del mercato. I dati di bilancio relativi agli ultimi esercizi e, ove disponibili, le proiezioni di *budget* per l'anno in corso e per il triennio a venire consentono, infatti, di formulare giudizi quantitativi sulla capacità dell'impresa di produrre reddito e di generare *cash flow* adeguati dalla gestione caratteristica. La valutazione dello stato patrimoniale offre elementi per osservare la solidità del capitale aziendale. Sulla base dei rendiconti finanziari di base possono esser elaborati centinaia di indici o rapporti finanziari potenzialmente utili per valutare il merito di credito di un'impresa. La selezione, la combinazione e il peso attribuito ai diversi indici possono dipendere da scelte individuali dell'analista, ovvero possono formare oggetto di una modellazione specifica. L'affermazione di tecniche quantitative e la disponibilità di database ampi e diversificati sospingono verso quest'ultimo approccio, che comprende, peraltro, spesso l'utilizzo di variabili addizionali di carattere qualitativo, le quali consentono appunto di catturare elementi di carattere soggettivo e qualitativo del processo creditizio. Condizione necessaria per estrarre informazioni utili dal bilancio è, naturalmente, l'affidabilità e la veridicità delle rappresentazioni contabili offerte.

2) Un secondo filone di informazioni utili a valutare le probabilità di inadempienza comprende tutti gli elementi di valutazione soggettiva delle prospettive e dei rischi di un'impresa. La soggettività non implica l'assenza di elaborazione di informazioni quantitative, quanto piuttosto sia la scelta soggettiva degli elementi di riferimento, della loro ponderazione e della rilevanza ad essi attribuita ai fini della determinazione della probabilità di inadempienza, sia la disponibilità di informazioni non pubblicamente disponibili sulla società, sul management, sulle prospettive del settore e del mercato. Ad esempio, le società di *rating* nell'attribuzione dei *rating* delle obbligazioni introducono elementi aggiuntivi e in parte sostitutivi rispetto ai modelli utilizzati per stimare le probabilità di inadempienza delle aziende avvalendosi di dati estrapolati dai rendiconti finanziari.

Queste ultime probabilità e i *rating* ufficiali assegnati non sono, pertanto, direttamente confrontabili. Come è stato osservato, esse rappresentano due diverse, seppur correlate, misurazioni del rischio di credito. La correlazione tra i due sistemi, per costruzione, è imprecisa. La diversità dipende, semplificando al massimo, da tre ordini di fattori: i) i *rating* sono funzione non solo delle PD, ma anche, come meglio vedremo nel seguito, della gravità della perdita in caso di inadempienza; ii) i *rating* vengono formulati tenendo conto del rischio di improvvisi e consistenti cambiamenti della qualità di credito del mutuatario (il cosiddetto rischio di transizione); iii) i *rating* incorporano valutazioni – soggettive - delle agenzie di *rating* su molteplici fattori giudicati influenti sulla solidità del debitore, quali: la situazione economica e politica del Paese; la posizione concorrenziale e le quote di mercato dell'impresa; il rischio di regolamentazione (segnatamente di tipo *antitrust*), nonché il posizionamento di settore.

Nel caso di società quotate in borsa o, comunque, con titoli quotati in mercati organizzati, si dispone di un terzo insieme di informazioni rilevanti per la misurazione della PD: i prezzi di mercato del debito e delle azioni dell'impresa. Pur senza accettare i modelli di efficienza dei mercati nelle diverse accezioni - e segnatamente in forma forte – occorre riconoscere che i prezzi rappresentano un indicatore eminentemente rivolto al futuro, mentre i dati estrapolati da rendiconti finanziari sono fondamentalmente rivolti al passato.

In termini generali, si può quindi sostenere che i metodi più efficaci di misurazione della PD derivano da modelli che incorporano correttamente sia le informazioni di prezzo, sia quelle estrapolate dai rendiconti finanziari, sia, infine, quelle "soggettive e qualitative" dei fattori di valutazione dell'impresa precedentemente illustrati.

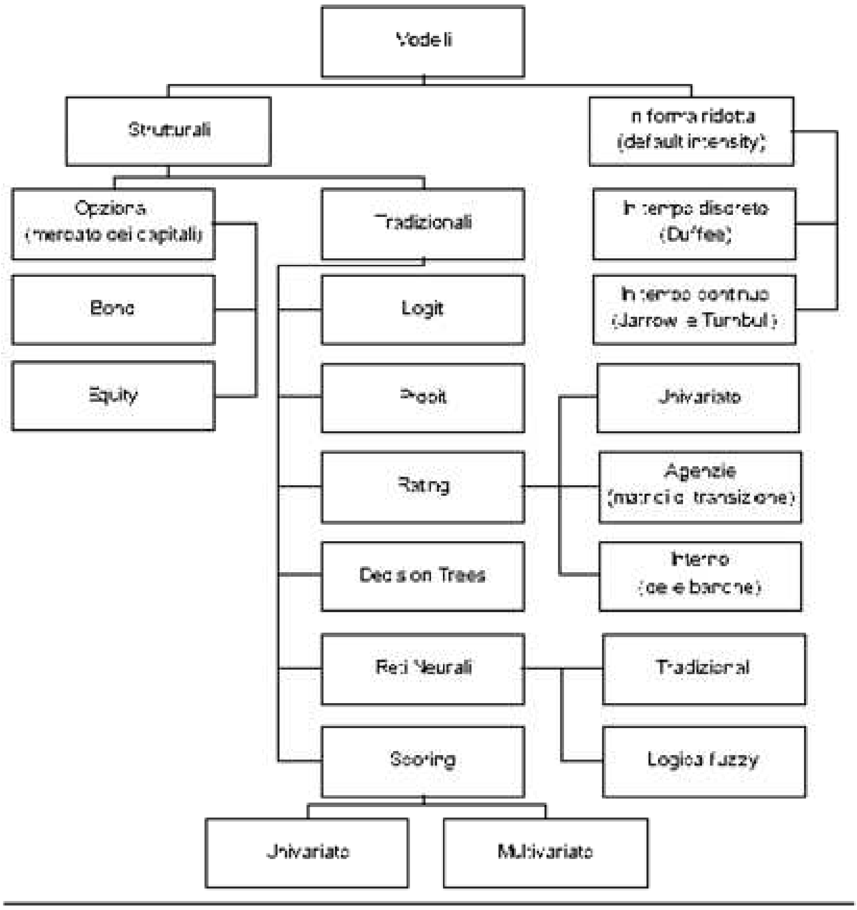
La combinazione dei diversi elementi non è agevole e i metodi misti possono di fatto risultare eccessivamente soggettivi nella valutazione della PD. D'altra parte, i modelli basati prevalentemente sulle informazioni di prezzo per società quotate, non hanno sin qui mostrato una evidente superiorità rispetto agli schemi "eclettici" sopra menzionati.

Si definiscono modelli finanziari quelli che producono le PD (e la perdita in caso di insolvenza) sulla base delle quotazioni correnti di azioni e obbligazioni dell'impresa e dei dati desunti dagli ultimi rendiconti finanziari.

I modelli finanziari strutturali (o causali) "di prima generazione" (modelli à la Merton) partono dal presupposto che le azioni di un'impresa rappresentino un'opzione scritta sugli *assets* aziendali con il punto di insolvenza, a scadenza, rappresentato dal valore di libro delle passività: quando il valore delle attività scende al di sotto del punto di insolvenza, l'impresa diventa inadempiente. Questa prima versione dei modelli strutturali non è però in grado di prevedere, a differenza di quanto osservato empiricamente, la possibilità di *default* prima della scadenza delle passività. Il problema in questione è stato affrontato e risolto dai c.d. *first passage time models* (Black e Cox, 1976) che ipotizzano che le azioni aziendali siano delle opzioni di tipo *down-and-out* scritte sulle attività aziendali con il punto di insolvenza rappresentato da una barriera fissata in maniera esogena (ad esempio in base ai *covenants* delle passività).

I modelli finanziari causali sviluppati da Merton, Black e Scholes, Vasicek e Kealhofer sono stati elaborati con finalità direttamente operative da KMV, società recentemente acquisita da Moody's. KMV ha elaborato una implementazione operativa del modello à la Merton per calcolare la cosiddetta EDF (*Expected Default Frequency*): una metrica del rischio creditizio che definisce la probabilità di inadempienza durante l'anno successivo (o fino a 5 anni).

Modelli di stima quantitativa delle probabilità di inadempienza



Il principio generale alla base di tutti i modelli finanziari (o opzionali) risiede nell'assunzione che le azioni, rappresentanti il patrimonio netto di un'impresa, costituiscono il *claim* residuale sull'attivo, dopo che sono stati soddisfatti tutti gli altri contratti di credito. Gli azionisti sono inoltre caratterizzati da passività limitate (*limited liability*), in caso di inadempienza dell'impresa. Un'opzione *call* scritta sulle attività dell'impresa ha le stesse caratteristiche e proprietà, sotto il profilo economico e giuridico. Il detentore dell'opzione *call* ha un diritto sugli *assets* dell'impresa, valutati al valore di mercato scontando al tasso di interesse appropriato i *cash flow* generati, che gli consente di riacquistarne la proprietà mediante il pagamento dello *strike price* dell'opzione. Come si è indicato, nel modello classico di Merton lo *strike* è eguale al valore di libro dei debiti totali dell'impresa. Pertanto, nel caso in cui il valore di mercato dell'attivo non risulta sufficiente a fronteggiare il valore di libro delle passività, gli azionisti (equivalenti ai detentori della opzione *call*) non eserciteranno la loro opzione, lasciando l'impresa nelle mani dei creditori, che possono esser visti come i veri proprietari dell'impresa fin quando non sono pienamente rimborsati dagli azionisti - e accettandone, quindi, l'insolvenza.

3.1 Dalla PD alla EL

Per arrivare dalla PD al *rating* è, peraltro, necessaria una serie di passaggi volti a quantificare l'effettiva perdita anticipata nel caso di inadempienza.

La perdita attesa (*Expected Loss*, o EL) può esser calcolata in base alla seguente equazione:

Perdita attesa = Probabilità di *default*

× Esposizione attesa in caso di *default*

× Perdita in caso di *default*

ovvero, in simboli:

[27] $$EL = PD \times EAD \times LGD$$

dove EAD indica l'*Exposure At Default* ovvero l'esposizione attesa al momento dell'inadempienza, mentre LGD denota la *Loss Given Default* e cioè le perdite effettivamente attese, tenuto conto delle garanzie al momento dell'inadempienza. Il calcolo delle EL va opportunamente integrato con il riferimento a un ulteriore parametro: M (*Maturity*), ovvero la scadenza media del prestito. È evidente, infatti, che, a parità di altre condizioni, il rischio di inadempienza è tanto più alto quanto più lungo è l'orizzonte temporale del contratto di credito.

La metodologia sintetizzata dall'applicazione dell'equazione [27] a un portafoglio creditizio consente di misurare le perdite anticipate, che dovrebbero trovare compensazione in conto economico, attraverso idonei *spread* richiesti sui crediti rispetto al tasso di interesse *risk-free*).

Occorre, peraltro, tener conto della possibilità di eventi sfavorevoli non anticipati dal mercato, ovvero del deterioramento imprevisto della qualità creditizia di singole rilevanti controparti o di determinati settori. Le perdite inattese, a livello di portafoglio, UL (*Unexpected Loss*), dovrebbero trovare presidio per un intermediario creditizio nei mezzi propri. Il capitale rappresenta dunque una sorta di ammortizzatore per coprire, con un dato livello statistico di confidenza, la volatilità delle perdite attese, cioè la variazione delle perdite nel tempo ascrivibile a eventi inattesi, ma non irragionevolmente escludibili dall'insieme degli accadimenti possibili.

3.2 Credit scoring e credit rating

Nell'approccio tradizionale nei confronti del rischio di credito, le informazioni raccolte sulle caratteristiche del mutuatario portavano ad un giudizio largamente soggettivo, con una decisione sostanzialmente binaria (sì o no). In caso affermativo il *credit spread* dell'operazione era pari allo *standard* praticato dalla banca per la tipologia di impresa.

Non stupisce, quindi, che i primi schemi di carattere quantitativo volti a ridurre la soggettività delle valutazioni fossero comunque costruiti sulla base di metodologie in grado di generare punteggi discriminanti, fissando, cioè, soglie di accettazione dell'operazione creditizia e non vere e proprie probabilità. Il presupposto degli *scores* era, dunque, la capacità di individuare una metrica in grado di dividere le posizioni buone da quelle cattive, sulla base delle due diverse distribuzioni statistiche, consentendo di identificare opportuni *cut off scores*. Lo score consentiva quindi di classificare tra *pass credit* e non *satisfactory credit*.

I lavori classici, che in campo accademico, hanno sviluppato l'analisi di score sulla base degli indici finanziari sono quelli di Beaver (1966, 1968) e di Altman (1968).

La principale differenza analitica tra i due approcci consisteva nella metodologia univariata del primo rispetto a quella multivariata del secondo. L'analisi di Beaver era, dunque, più vicina alla metodologia tradizionale bancaria nell'analisi di fido.

Gli indici ritenuti più significativi, estrapolati dai rendiconti finanziari, erano confrontati uno per volta con quelli medi di settore per ottenere indicatori della solidità dell'impresa. Beaver mostrò, infatti, che molti indici (*ratios*) potevano discriminare e - prevedere - lo stato di *stress* aziendale.

Gli schemi univariati consentono anche di tener agevolmente conto di variabili di tipo qualitativo, che hanno peso rilevante nelle decisioni creditizie dei *credit manager* bancari. L'approccio di Altman partiva dalla stessa premessa: indici finanziari riassuntivi della redditività, liquidità, leva finanziaria e solvibilità avevano un potenziale predittivo della bancarotta aziendale. Egli adottò, peraltro, la metodologia multivariata come lo strumento statistico appropriato a dare risposte quantitative e oggettive ai seguenti due quesiti: quali indici sono più importanti per anticipare le difficoltà finanziarie e che pesi occorre dare agli indici prescelti come più significativi?

È evidente che una soluzione unitaria alle questioni precedenti consente di costruire un vero modello predittivo. L'Analisi Discriminante Multipla (ADM) rappresenta una tecnica statistica relativamente semplice e ampiamente collaudata; risale, infatti, a oltre settanta anni fa. Essa è utilizzata principalmente per operare classificazioni e fare previsioni con riferimento a fenomeni in cui la variabile dipendente ha caratteristiche qualitative, il più possibile definite in modo binario, quindi maschio/femmina, sano/malato, e, appunto, adempiente/inadempiente.

Nel modello iniziale di Altman il primo passo è stato quello di definire la classificazione di due gruppi di società manifatturiere americane: 33 in dissesto e 33 adempienti. Il gruppo di imprese inadempienti avevano chiesto l'ammissione allo stato di bancarotta sulla base del *Chapter X* dell'allora vigente *National Bankruptcy Act*, nell'arco di 20 anni, tra il 1946 e il 1965. Un analogo gruppo di imprese sane è stato selezionato per porre a confronto gli indici finanziari tra le due tipologie. Dopo aver costruito i due campioni sono stati creati i database, derivati dal conto economico e dallo stato patrimoniale, da cui sono stati selezionati 22 indici considerati potenzialmente utili per discriminare le imprese sane da quelle in stato di *distress*. Questo processo di selezione con tecniche di ADM è stato completato con la scelta di cinque indicatori apparsi come i più idonei a prevedere l'inadempienza di un'impresa.

È importante sottolineare l'importanza e la significatività dei processi di trasformazione e di scelta degli indici finanziari. Le modalità di selezione e di utilizzo di queste variabili contribuiscono in modo determinante alla capacità previsiva del modello adottato. In vista del numero estremamente elevato delle possibili combinazioni di indici, l'analisi statistica offre un contributo parziale alla selezione.

Le prime fasi di ricerca e selezione sono affidate al giudizio del ricercatore/analista. Sono stati sviluppati e sono oggi disponibili criteri utili a operare questo vaglio preliminare: come è stato indicato ad esempio da Moody's (2003, pp. 7-8) i ratio devono essere intuitivi e individualmente potenti, le rilevazioni disponibili devono essere sufficientemente numerose.

I metodi di selezione inizialmente utilizzati da Altman erano fortemente soggettivi e, nonostante l'affermazione di criteri oggettivi appena ricordata, permaneva nel processo di selezione un grado significativo di scelta individuale.

I modelli di *scoring* consentono comunque di aggiungere al *set* di indicatori finanziari quantificabili un numero seppur ridotto di variabili che cercano di catturare elementi qualitativi di valutazione del merito di credito, sempre, peraltro, nell'ottica descritta di valutazione positiva o negativa.

Il modello Z-*score* di Altman nella formulazione originaria

$$Z = 1{,}2\,X_1 + 1{,}4\,X_2 + 3{,}3\,X_3 + 0{,}6\,X_4 + 1{,}0\,X_5$$

dove: Z = score (o indice generale);

X_1 = capitale circolante netto / totale attività nette;

X_2 = utili non distribuiti / totale attività nette;

X_3 = reddito operativo (EBIT) / totale attività nette;

X_4 = valore di mercato del patrimonio netto totale / valore di libro delle passività totali;

X_5 = fatturato totale / totale attività nette.

Fonte: Altman (1968).

I modelli di *scoring* sono stati, in conclusione, costruiti e elaborati non tanto per fornire vere e proprie probabilità di inadempienza e, quindi, di perdita attesa. Essi indicano piuttosto punteggi discriminanti, fissando soglie di accettazione in un contesto sostanzialmente binario.

I metodi di *scoring* possono essere trasformati per fornire elementi di valutazione cardinale delle probabilità di *default*, ma il processo non è agevole.

Gli sviluppi successivi alle pionieristiche applicazioni di Altman si sono mossi per definire direttamente l'insolvenza in termini di probabilità, non solo di accettabilità o meno sulla base di soglie discriminanti. Negli anni più recenti si sono diffuse metodologie di stima basate su tecniche logistiche (approcci cd. *logit o probit*) che, per loro natura, consentono di descrivere la vicinanza ad eventi di insolvenza con rappresentazioni logiche riconducibili a probabilità di evento.

È evidente come tale soluzione metodologica appaia più vicina all'esigenza analitica richiesta dal giudizio di *rating*; i metodi di *scoring* sono rimasti invece largamente diffusi laddove è sufficiente un'articolazione ordinale del merito di credito per la decisione, secondo una scala di valori e una metrica che non necessariamente debbono fare riferimento ad una PD, ma richiedono efficienza di scelta (affidamenti nel contesto *retail*, come il credito al consumo, i mutui residenziali e così via).

L'approccio del *rating* e, quindi, la definizione di un *continuum* di *risk weights*, si presta all'adozione di tecniche analitiche di *risk pricing*, ovvero della determinazione di tassi di interesse che consentano la formazione di un portafoglio correttamente remunerato per i rischi assunti.

3.3 Dalla EL alla UL[9]

Il rischio creditizio può essere stimato attraverso due variabili fondamentali: la perdita potenziale o attesa (EL) e la volatilità della EL. In realtà, la EL non fa parte del rischio; essa rappresenta piuttosto un costo implicito nell'attività di *lending*, che mediamente andrà pagato nell'arco di tempo preso in esame. Il vero rischio è connesso alla volatilità delle perdite inattese. Come già accennato in precedenza, la distribuzione di probabilità del rischio creditizio è fortemente asimmetrica, con una coda che indica, con probabilità basse, perdite molto elevate. La distanza dal valore medio (EL) e la rilevanza delle perdite non identificate dipendono fondamentalmente dal ciclo e dalla diversificazione del portafoglio creditizio. In particolare, a titolo d'esempio si consideri

[9] Per un'analisi formale delle relazioni tra EL ed UL si rinvia all'Appendice 1.

il caso di un portafoglio creditizio di valore W caratterizzo dalla presenza di N prenditori, ciascuno dei quali viene affidato per un importo W_i (ovviamente $\sum_{i=1}^{N} W_i = W$).

Si definisca inoltre come l_i la variabile casuale "tasso di perdita del prenditore i-esimo". In tale ambito possiamo definire la perdita attesa di portafoglio (EL_P) e la sua <u>*standard deviation*</u> (σ_P) come:

[28]

$$EL_P = W\sum_{i=1}^{N} w_i EL_i \ ; \ \sigma_P = W\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N}\ \sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}\right)} = W\sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i \sigma_{iP}} \ ;$$

dove:

$$w_i = \frac{W_i}{W}$$
$$E(l_i) = el_i$$
$$EL_i = (Ww_i)el_i = W_i el_i$$
$$Std(l_i) = \sigma_i$$
$$Cov(l_i, l_j) = \sigma_{ij}$$
$$Cov(l_i, \sum_{i=1}^{N} w_i l_i) = \sigma_{iP}$$

Si osservi che mentre, in base al CAPM, i vantaggi della diversificazione del rischio di mercato, con riferimento ad esempio a titoli azionari, si ottengono rapidamente (a partire da 10-15 titoli), la riduzione del rischio creditizio (UL) non ha praticamente limite all'aumentare della diversificazione.

La volatilità delle perdite di portafoglio (σ_P) implica il passaggio alla perdita inattesa (UL). La UL è una funzione positiva, della *standard deviation* della distribuzione di frequenza delle possibili perdite sul portafoglio creditizio. In termini formali possiamo pertanto scrivere:

[29] $$UL \equiv UL(\sigma_P) = UL\left(W\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N}\ \sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}\right)}\right) = UL\left(W\sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i \sigma_{iP}}\right)$$

con: $\frac{\partial UL}{\partial \sigma_P} > 0$.

Va peraltro rimarcato che nella prassi seguita da molti *risk managers* bancari si è soliti approssimare le perdite inattese di un singolo prenditore (UL_i) e, di conseguenza, quelle di un portafoglio creditizio (UL), con le corrispondenti volatilità. Pertanto, in base alla simbologia sopra introdotta, si ha rispettivamente:

$$UL_i = W_i \sigma_i$$
$$UL \equiv \sigma_P$$

In questo schema semplificato possiamo quindi riscrivere l'equazione [29] come:

[30] $$UL \equiv \sigma_P = W\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}\right)} = W\sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i \sigma_{iP}} = W\sum_{i=1}^{N} UL_i \rho_{iP}$$

con: $\rho_{iP} = \dfrac{\sigma_{iP}}{\sigma_i \sigma_P}$.

Vengono ora forniti gli elementi di valutazione del pricing del credito verso una controparte esplicitando le ipotesi di PD e EL specifiche del prenditore di fondi e dell'operazione, tenendo presente l'assorbimento di capitale che i moderni approcci gestionali delle banche consentono di quantificare sulla base dell'approccio UL.

A tal proposito si consideri preliminarmente il caso di un'operazione di finanziamento di una banca verso un cliente i di ammontare di un euro al tasso r_i. Non considerando per ora il capitale assorbito e il suo costo, i due possibili *payoffs* dell'operazione sono rappresentati da:

- $1 + r_i$ in caso di solvibilità del prenditore;
- $R_i(1 + r_i)$ in caso di *default*;

dove R_i è il *recovery rate* atteso dell'operazione. Ai fini di *pricing* dell'operazione in questione ricordiamo che in base al c.d. *martingale approach* il prezzo di qualsiasi strumento finanziario è pari al valore atteso, sotto una misura di probabilità *risk neutral*, del suo *payoff* scontato al tasso privo di rischio.

Nell'esempio qui trattato il prezzo del nostro prestito è noto: è pari infatti a 1 euro (trattandosi di una classica operazione di mutuo emesso alla pari). Possiamo pertanto scrivere l'equazione di *pricing* come di seguito:

[31] $$1 = \frac{(1 + r_i)PD_i^* + R_i^*(1 + r_i)(1 - PD_i^*)}{(1 + r)}$$

dove PD_i^* e R_i^* rappresentano rispettivamente la probabilità di *default* e il *recovery rate* del prenditore in un mondo *risk neutral*, mentre r rappresenta il tasso privo di rischio.

Dopo alcuni semplici passaggi e ricordando che la *Loss Given Default* dell'operazione, sotto - in questo caso - una misura *risk-neutral*, è pari a $LGD_i^* = 1 - R_i^*$ possiamo scrivere

[32] $$r_i^{mkt} \equiv r_i = \frac{r + PD_i^* LGD_i^*}{1 - PD_i^* LGD_i^*}.$$

Il tasso così ottenuto, r_i^{mkt}, rappresenta il tasso da applicare al prenditore, nel caso in cui si ipotizza che il mercato del credito sia perfettamente concorrenziale e dunque la banca sia *price-taker*. In questo contesto, come si vede dalla [32] il tasso applicato al prenditore i dipende esclusivamente dal merito di credito dell'affidato.

Introduciamo ora nell'analisi i problemi inerenti al capitale assorbito per l'operazione e al suo costo. In particolare si assume che l'euro prestato costa:

- $1 + i_k$ per la parte $1 - \alpha_i$ finanziata al tasso interbancario per la banca k;
- $1 + c_k$ per la parte α_i finanziata al costo del capitale economico per la banca k.

E' importante notare che nell'analisi semplificata che viene qui esposta la quota finanziata al costo del capitale, α_i, non rappresenta una variabile esogena al modello. Infatti α_i viene ricavata tramite il modello di determinazione del capitale economico ed è una funzione positiva della UL_i e quindi della PD_i ($\alpha_i \equiv \alpha_i(PD_i)$).

Disponiamo ora degli elementi utili per tener conto simultaneamente delle caratteristiche di rischiosità dell'operazione, dell'assorbimento di capitale economico connesso alle perdite inattese che misuriamo attraverso la volatilità della EL, e della remunerazione del capitale corretta per il rischio, che possiamo identificare nel costo del capitale, ovvero nel RORAC obiettivo. Consideriamo quindi i costi operativi della banca (con *credit rating* k), assumendo che tali costi corrispondano al differenziale di remunerazione dei depositi rispetto al costo della raccolta di mercato che la banca deve corrispondere, sintetizzato dal tasso interbancario richiesto alla banca (i_k). Assumiamo inoltre di finanziare il capitale economico della banca a un unico tasso (c_k), senza tener conto pertanto delle diverse modalità (e *mix*) di raccolta.

A tal proposito, eguagliando il valore atteso del ricavo al valore atteso del costo otteniamo un'equazione, nell'incognita r_i. Si ha infatti:

[33] $(1-PD_i)(1+r_i)+PD_iR_i(1+r_i)=(1+i_k)(1-\alpha_i)+(1+c_k)\alpha_i$.

Si noti che in questo caso vanno considerate la PD_i e la R_i "fisiche" e non già quelle *risk-neutral* posto che stiamo eguagliando il *payoff* atteso dell'operazione sotto la vera misura di probabilità con il suo costo di *funding*.

Esplicitando la [33] rispetto all'incognita risulta:

$$
\text{[34]}\quad
\begin{aligned}
r_i &= \frac{1+i_k+\alpha_i(c_k-i_k)}{1-PD_i(1-R_i)}-1= \\
&= \frac{1+i_k+\alpha_i(c_k-i_k)-1+PD_i(1-R_i)}{1-PD_i(1-R_i)}= \\
&= \frac{i_k+\alpha_i(c_k-i_k)+PD_i(1-R_i)}{1-PD_i(1-R_i)}= \\
&= \frac{i_k+\alpha_i(c_k-i_k)+PD_iLGD_i}{1-PD_iLGD_i}.
\end{aligned}
$$

Il tasso r_i del prestito al debitore con *rating* i cresce con i_k, con LGD_i, con PD_i e con α_i che, come detto, a sua volta dipende positivamente dalla PD_i. Si riportano di seguito le sue principali *sensitivities*.

$$
\frac{\partial r_i}{\partial PD_i}=\frac{LGD_i\left(1+\alpha_i(c_k-i_k)+i_k\right)+\left(1-PD_iLGD_i\right)(c_k-i_k)\dfrac{\partial\alpha_i}{\partial PD_i}}{(1-PD_iLGD_i)^2}>0;
$$

$$
\frac{\partial r_i}{\partial LGD_i}=\frac{PD_i\left(1+\alpha_i(c_k-i_k)+i_k\right)}{(1-PD_iLGD_i)^2}>0;
$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial i_k} = \frac{1-\alpha_i}{1-PD_i LGD_i} > 0 .$$

Volendo semplificare il confronto tra r_i e r_i^{mkt} ipotizziamo, in via approssimativa, che il tasso interbancario e il tasso *risk-free* coincidano (dunque $r = i_k$), possiamo pertanto riscrivere la [34] come

$$[35] \qquad r_i = \frac{r+\alpha_i (c_k - r) + PD_i LGD_i}{1-PD_i LGD_i} .$$

Posto che è realistico ipotizzare un costo del capitale economico della banca maggiore del tasso *risk-free*, e tenuto conto che $PD_i^* LGD_i^* > PD_i\, LGD_i$, una banca in grado di essere *price-maker* sul mercato del credito applicherà un "*mark-up*" rispetto al tasso di concorrenza perfetta ($r_i > r_i^{mkt}$) se:

$$[36] \qquad c_k - r > \frac{1}{\alpha_i}\left[\left(\frac{1-PD_i LGD_i}{1-PD_i^* LGD_i^*}\right)\left(r+PD_i^* LGD_i^*\right)-\left(r+PD_i\, LGD_i\right)\right].$$

Va peraltro osservato che il modello di *pricing* della banca sin qui presentato si basa su una semplificazione sulla quale vale la pena soffermarsi al fine di poter comprendere in maniera più compiuta il rapporto tra il *pricing* del credito effettuato dalla banca e quello effettuato in un mercato di operatori "*price takers*" (come ad esempio i sottoscrittori di *corporate bonds*) per un generico prenditore i che si assume abbia accesso ad entrambe le fonti di finanziamento.

In particolare nel modello sin qui presentato si è, per semplicità, ipotizzato che il costo del capitale economico, c_k, sia costante[10]. In realtà la remunerazione del capitale corretta per il rischio rappresentabile ad esempio dal RORAC dipende negativamente dal capitale a rischio: all'aumentare del capitale a rischio si riduce l'indicatore in questione. Come si è detto sopra il capitale a rischio di una banca dipende positivamente dalle UL del suo portafoglio creditizio e dunque dalla *standard deviation* delle sue perdite. Utilizzando la simbologia sin qui introdotta possiamo quindi scrivere:

$$[37] \qquad c_k = c_k(\sigma_P) = c_k\left(W\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}\right)}\right) = c_k\left(W\sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i \sigma_{iP}}\right).$$

Posto che la UL del portafoglio creditizio dipende dalle singole UL_i e quindi dalle probabilità di *default* di ogni prenditore i-esimo e dalle correlazioni tra queste grandezze, si evince come il costo del capitale economico sia una funzione di tutte le probabilità di *default* dei prenditori affidati dalla banca e non del solo prenditore i-esimo. In particolare, sostituendo la [37] nella [36] otteniamo:

$$[38] \qquad c_k\left(W\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}\right)}\right) - r = c_k\left(W\sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i \sigma_{iP}}\right) - r > \frac{1}{\alpha_i}\left[\left(\frac{1-PD_i LGD_i}{1-PD_i^* LGD_i^*}\right)\left(r+PD_i^* LGD_i^*\right)-\left(r+PD_i\, LGD_i\right)\right].$$

Un'attenta analisi della [38] ci permette di concludere che tanto più piccola è la correlazione tra la volatilità del portafoglio creditizio, e quindi la sua UL totale, e la volatilità e quindi la UL_i del

10 Va inoltre aggiunto che un'altra approssimazione non trascurabile risiede nell'ipotizzare una *Loss Given Default* indipendente dalla *Probability of Default*.

singolo prenditore i-esimo, e dunque tanto più piccola è la correlazione tra la PD di portafoglio creditizio e la sua PD_i individuale, tanto più piccola sarà la differenza tra il tasso offerto da un mercato di operatori *price-takers* e il tasso offerto da un operatore come la banca che deve invece gestire un portafoglio di N prestiti soggetti a dei rischi di credito correlati.

Relazioni tra *PDi, LGDi, αi* e *ri*

PD (%)	r_i (%)*	LGD_i (%)	r_i (%)**	α_i (%)	r_i (%)***
0,5	5,20	30	5,75	4	6,06
1,0	5,54	35	5,93	6	6,17
1,5	5,83	40	6,11	8	6,28
2,0	6,11	45	6,29	10	6,39
2,5	6,39	50	6,47	13	6,55
3,0	6,65	55	6,65	15	6,65
5,5	8,00	60	6,84	21	6,98
8,0	9,36	65	7,02	24	7,14
10,5	10,74	70	7,21	27	7,30
13,0	12,13	75	7,39	30	7,46
15,5	13,54	80	7,58	33	7,63

lel capitale secondo l'approccio *IRB foundation*, LGD = 45%.
del capitale secondo l'approccio *IRB advanced*, PD = 2,47%.
del capitale secondo l'approccio *IRB foundation*, LGD = 45%, PD = 2,47%.

4. Rischio di credito ed *economic capital* [11]

De Servigny E Renault (2004) hanno proposto una semplice misura per computare il contributo individuale di ogni posizione alla perdita inattesa di un portafoglio. In termini analitici, nella loro proposta, il *Risk Contribution* (RC) della i-esima posizione è dato da:

$$RC_i = \frac{\partial UL_{portfolio}}{\partial UL_i} UL_i . \qquad [39]$$

In questa formulazione la perdita inattesa idiosincratica della i-esima posizione ponderata con la sensitività della perdita inattesa di portafoglio alle sue variazioni rappresenta il contributo marginale di rischio di ogni posizione al portafoglio[12]:

$$UL_{portfolio} = \sum_{i=1}^{N} RC_i . \qquad [40]$$

Formalmente può quindi essere detto che l'assorbimento di capitale (α) di un dato portafoglio è una funzione positiva della sua perdita inattesa. De Servigny and Renault (2004) suggeriscono una semplice funzione lineare:

$$\alpha_{portfolio} = m \times UL_{portfolio} \qquad [41]$$

dove m è un appropriato multiplo. Questa formulazione permette anche un facile calcolo del capitale economico allocato alla i-esima posizione; sfruttando la [39] e la [40] possiamo infatti scrivere:

11 Vedi R. Masera, Core, Mantle and Industry: a monetary perspective of the Basle Capital Accord, 2004.
12 Cfr. Appendice 2.

[42]

$$\alpha_{portfolio} = m \times \sum_{i=1}^{N} RC_i = m \times \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial UL_{portfolio}}{\partial UL_i} UL_i = m \times UL_{portfolio}$$

5. Aggregazione dei rischi e allocazione del capitale[13]

Sebbene i modelli e gli strumenti che si applicano alle diverse tipologie o aree di rischio richiedono spesso approcci diversi, resta la necessità di sviluppare e implementare un approccio unitario alla gestione dei rischi che consenta in maniera sistematica la valutazione, l'allocazione e la valorizzazione delle risorse patrimoniali disponibili.

Presenteremo ora un semplice modello di allocazione del capitale economico di una banca che fronteggia diverse tipologie di rischio. In particolare, si ipotizzi che la banca debba gestire N diverse tipologie di rischio (rischio creditizio, rischio da tasso di interesse, rischio valutario, rischi operativi, ecc.), e che ciascun rischio i-esimo sia, a sua volta, influenzato da Mi fattori specifici, idiosincratici (ad esempio i diversi prenditori di un portafoglio creditizio, i diversi titoli azionari in portafoglio, i diversi nodi della curva dei tassi, ecc.).

In linea con quanto già mostrato nel precedente paragrafo per il rischio di credito, il capitale allocato a ciascun rischio i-esimo è funzione diretta della ULi riferibile a quella data tipologia di rischio. Possiamo quindi scrivere la volatilità delle perdite di ogni tipologia di rischio come:

[43]

$$\sigma_i = W_i \sqrt{\left(\sum_{z=1}^{M_i} \sum_{g=1}^{M_i} w_z w_g \sigma_{zg} \right)}$$

dove Wi è l'ammontare delle attività soggette al rischio i-esimo, Wg è, all'interno delle attività soggette al rischio i-esimo, l'ammontare delle attività soggette al generico rischio specifico g-esimo. Segue pertanto che:

[44]

$$W_i = \sum_{g=1}^{M_i} W_g$$

$$w_g = \frac{W_g}{W_i}$$

e σ_{zg} rappresenta invece la covarianza tra i fattori specifici, idiosincratici, g e z, che influenzano il rischio i-esimo. Così come fatto nello specifico per il rischio di credito, possiamo ora definire la perdita attesa e il capitale non diversificato (rispetto alle altre fonti di rischio, ma diversificato per i suoi fattori di rischio specifici) per la generica tipologia di rischio i-esimo come:

13 Vedi R. Masera, Rischio, banche, imprese Il Sole24 Ore, 2005.

$$UL_i \equiv UL(\sigma_i) = UL\left(W_i \sqrt{\left(\sum_{z=1}^{M_i} \sum_{g=1}^{M_i} w_z w_g \sigma_{zg} \right)} \right);$$

[45]

$$c_{i,UND} \equiv c_{i,UND}(\sigma_i) = c_{i,UND}\left(W_i \sqrt{\left(\sum_{z=1}^{M_i} \sum_{g=1}^{M_i} w_z w_g \sigma_{zg} \right)} \right).$$

Si definisca ora come σ_{ij} la covarianza tra la tipologia di rischio i-esima e quella j-esima. La volatilità che la banca deve affrontare a fronte delle N tipologie di rischio cui è esposta è pertanto uguale a:

[46] $$\sigma_D = W \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \right)}$$

dove:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W_i$$

$$w_i = \frac{W_i}{W}$$

Possiamo ora scrivere il capitale diversificato come:

[47] $$c_D \equiv c_D(\sigma_D) = c_D\left(W \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \right)} \right).$$

6. Capitale di rischio e capitale di debito: un approfondimento[14]

In Italia, tradizionalmente, accanto alla *common equity* – la più costosa forma di capitale per una banca – le poste *equity equivalent* sono generalmente costituite da riserve legali, fondi rischi eccedenti su crediti, fondo rischi generali, fondo Tfr, mentre restano poco utilizzate le azioni privilegiate e quelle di risparmio. Nel nuovo contesto internazionale, occorre tener conto di *preference shares* e *convertible preference shares*. Le prime hanno una preferenza rispetto alla *common equity*, rispetto sia al pagamento di dividendi, sia al valore residuo della banca, nel caso di liquidazione.

Le *preference shares* sotto un profilo analitico possono esser viste come una forma di debito altamente subordinato.

Accanto alle *prefence shares* possono esser attivate le *convertible preference shares*. La opzione di conversione è generalmente acquistata dall'investitore: ciò lascia, peraltro, un potere di capital management della banca a disposizione di una terza parte.

---

14 Vedi R.S. Masera "La *corporate governance* nelle banche", Il Mulino, Bologna, 2006.

Una forma innovativa di capitale è rappresentata dagli strumenti ibridi di tipo *equity*. Queste forme di capitale combinano elementi di debito stabile (pagamenti fissi di *coupon*, opzione di conversione) con elementi caratteristici dei mezzi propri (conversione obbligatoria nel caso di *default* in azioni ordinarie o preferenziali e/o *coupon* o dividendo non cumulativo).

Gli strumenti ibridi sono generalmente offerti come strumento perpetuo, ma sono spesso caratterizzati da clausole di redimibilità opzionali o condizionali. Questi strumenti sono generalmente collegati a strutture dedicate di tipo SPV (*Special Purpose Vehicle*) ovvero di tipo trust[15].

Un ulteriore strumento innovativo per corrispondere alle esigenze di capitale di rischio è rappresentato dal *contingent capital* (CC). La novità di questo strumento sta, in primo luogo, nel suo carattere di *off-balance sheet capital*. Uno strumento CC è un'opzione che consente di aumentare il capitale *on balance sheet*, a condizioni predeterminate[16].

La banca il cui Consiglio d'Amministrazione ha deciso di rafforzare la base patrimoniale attraverso questo strumento acquisisce il diritto di vendere i propri titoli a un prezzo prefissato per un determinato periodo di tempo. I titoli possono essere azioni, debito subordinato, o una combinazione dei due.

L'opzione è dunque strutturata come opzione *put* ed è scritta da un operatore finanziario (compagnia di assicurazione, investitore istituzionale), che si obbliga a comprare i titoli secondo le condizioni prestabilite.

Le condizioni previste includono di norma condizioni *covenants* che la banca deve rispettare, rispetto, ad esempio, ai coefficienti patrimoniali minimi da rispettare, evidentemente in eccesso rispetto agli standard regolamentari.

I costi della CC *option* sono evidentemente di due tipi: il premio per l'opzione e il rendimento del titolo emesso, se l'opzione è esercitata.

E' facile comprendere che, ex ante, le due controparti si accorderanno per un costo complessivo: a fronte di un premio per l'opzione più elevato sarà possibile ottenere un tasso di finanziamento più basso. Il *trade-off* dipenderà dalla valutazione soggettiva delle probabilità che il *trigger event* si verifichi. Il premio per l'opzione può inoltre essere pagato con un unico versamento, ovvero essere suddiviso lungo l'arco temporale validità dell'opzione.

Ai fini attuali si deve porre in evidenza come all'opzione *put* corrisponda sostanzialmente un prodotto di finanziamento, e non di trasferimento, del rischio. Il costo del contratto dovrebbe logicamente esser visto come parzialmente alternativo al costo del capitale che dovrebbe esser fronteggiato se il capitale fosse aumentato immediatamente.

In realtà, un modo complementare di considerare il capitale economico come *buffer* rispetto al rischio è quello di interpretarlo come una forma di assicurazione. Questa analogia è stata sviluppata da Merton e Perold (1993a, 1993b). In base a questo modello, l'assicurazione normale è appunto rappresentata dal capitale (di rischio e di debito): il costo di questa assicurazione è rappresentato dal margine richiesto dagli investitori rispetto al *risk-free rate*.

---

15 Cfr. ad esempio Matten (2000).

16 E'evidente l'analogia con le linee di credito che le stesse banche si impegnano ad attivare a date condizioni (lettere di credito e *revolving credit facilities*).

Il modello può esser sviluppato prendendo in considerazione il costo e il valore dei contratti di carattere assicurativo che la banca può attivare per coprire i rischi di portafoglio, attraverso contratti *off-balance* sheet, in alternativa al ricorso a forme di capitale in bilancio.

La stessa crescita esplosiva dei <u>*credit derivatives*</u> può esser interpretata come una forma di copertura (assicurativa) del rischio creditizio alternativa all'attivazione di capitale.

7. *Capital structuring* di una banca con un modello strutturale *à la Merton*

Si ipotizzi che la struttura finanziaria dell'impresa bancaria sia composta: a) da un'unica passività (B) di tipo *zero-coupon* con scadenza T e *face value* (F); b) *equity* (E). Il prospetto di bilancio per la banca in questione sarà quindi il seguente.

ASSETS	***LIABILITIES***
	E
A	
	B

La dinamica degli *assets* (A) si assume guidata dalla seguente equazione differenziale stocastica:

[48] $$dA = \mu A dt + \sigma A dz;$$

con dz~ $N\left(0, \sqrt{dt}\right)$. Applicando il Lemma di Ito alla [48] possiamo scrivere:

[49] $$d \ln A = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz;$$

ne segue che:

[50] $$\Delta A = A\left[e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}} - 1\right].$$

Il VaR delle attività bancarie può essere definito come:

[51] $$\Pr ob\left(-VaR \leq \Delta A\right) = \alpha;$$

dove α è il livello di confidenza prescelto. In base alla [50] possiamo pertanto il VaR per un dato orizzonte temporale T sarà pari a:

[52] $$VaR\left(A, \alpha, T\right) = A\left[1 - e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t - \sigma\varepsilon_\alpha\sqrt{dt}}\right];$$

con:

[53] $$\Pr ob(-\varepsilon_{\alpha} \le \varepsilon) = \alpha .$$

Seguendo l'analisi di Merton (1974) il valore di mercato delle azioni (E) e delle passività (B) è dato rispettivamente da:

[54] $$E = A\ N(d_1) - Fe^{-rT}\ N(d_2) \equiv call(A,F);$$

[55] $$B = Fe^{-rT} - Fe^{-rT}\ N(-d_2) - A\ N(-d_1) \equiv B^* - put(A,F)$$

con:

[56] $$d_1 = \frac{\ln(A/F) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}};\ \text{e}\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} .$$

In tale contesto semplificato, se si ipotizza che la banca detenga capitale economico in ragione del VaR delle proprie attività sfruttando la [52] possiamo scrivere:

[57] $$E = m \times VaR\ (A, \alpha, T) = m \times A\left[1 - e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t - \sigma\varepsilon_{\alpha}\sqrt{dt}}\right];$$

con m che rappresenta un moltiplicatore prudenziale, ipotizzato esogenamente dato (ad esempio da parte del *regulator*).

Per capire quale possa essere il livello di confidenza prescelto, α, per il calcolo del VaR, e quindi per la detenzione del capitale economico, si ipotizzi che la banca voglia mantenere un dato *standing* creditizio riflesso in un *credit spread* obiettivo, $\bar{\eta}$. Posto che:

[58] $$B = Fe^{-(r+\eta)T};$$

alcune semplici manipolazioni della [55] ci permettono di scrivere:

[59] $$\eta = -\ln\left(\frac{B^* - put(A,F)}{B^*}\right) \Big/ T .$$

La precedente equazione ci mostra quindi come il *credit spread* obiettivo, $\bar{\eta}$, sia compatibile con un unico livello di indebitamento $\bar{F}$. Posto che nel modello di Merton il valore di mercato delle azioni è pari a quello di una *call option* sulle attività, possiamo uguagliare la [54] e la [57] ottenendo:

[60] $$E = m \times VaR\ (A, \alpha, T) = call\ (A, F);$$

da cui si comprende come il *credit spread* obiettivo, $\bar{\eta}$ e il conseguente livello di indebitamento obiettivo $\bar{F}$ determinino il livello di confidenza target $\bar{\alpha}$.

Si ipotizzi ora che la stessa impresa ceda parte delle sue attività[17] e utilizzi il ricavato per acquistare una *put* scritta sulle proprie attività, con un generico prezzo di esercizio K. In tale mutato contesto il prospetto di bilancio sarà il seguente.

ASSETS	***LIABILITIES***
$\boldsymbol{A^C}$	$\boldsymbol{E^C}$
***Put*(*A*$^{\boldsymbol{C}}$,K)**	$\boldsymbol{B^C}$

Ovviamente non avendo attinto a nuove risorse possiamo scrivere: $A^C + put(A^C; K) = A = E^C + B^C = E + B$. Continuando a ipotizzare che valga la c.d. "*strict priority rule*" il nuovo valore delle azioni sarà pari a:

[61] $$E^C = A^C N\left(d_1{}^C\right) - Fe^{-rT} \; N\left(d_2{}^C\right) \equiv call\left(A^C, F\right)$$

con

[62] $$d_1^C = \frac{\ln\left(A^C / F\right) + \left(r + \sigma^2 / 2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ e } d_2^C = d_1^C - \sigma\sqrt{T} \, .$$

Il valore delle passività sarà invece pari a:

[63] $$B^C = Fe^{-rT} - put(A^C + \max\left(K - A^C; 0\right), F) = Fe^{-rT} - put(\max\left[K; A^C\right], F)$$

Posto che $A^C < A$ possiamo facilmente inferire che $E^C < E$, il valore della *call* sulle attività vale meno. Per ciò che attiene al valore delle passività occorre distinguere due casi.

§ 1° caso

Si consideri inizialmente il caso limite in cui si acquisti una *put* di protezione con prezzo di esercizio pari al valore facciale delle passività emesse dall'impresa (F). In questo caso la [63] diventa:

[64] $$B^C = Fe^{-rT} - put\,(\max\left[F; A^C\right], F)\,;$$

un'attenta analisi della [65] ci mostra che $put(\max\left[F; A^C\right], F)$ ha sempre un *payoff* pari a 0 (infatti per $A^C \geq F$ il *payoff* è ovviamente pari a 0 ma anche per $A^C < F$ il *payoff* è pari a F-max($A^C; F$)=F-F=0). Al fine di evitare arbitraggi il valore delle passività obbligazionarie dovrà quindi essere pari a:

[65] $$B^C = Fe^{-rT} = B^* \, .$$

17 Al fine di mantenere inalterati il tasso di deriva e quello di volatilità delle attività bancarie si ipotizza, per semplicità, che siano ceduti pro-quota tutti gli *assets*.

Come era lecito attendersi l'acquisto di una *put* protettiva sugli *assets* con prezzo di esercizio pari al valore facciale delle passività (F) fa sì che di fatto tutto il rischio di credito degli obbligazionisti venga trasferito all'esterno e dunque le obbligazioni emesse dalla banca sono, nel caso si continui ad assumere che valga la *strict priority rule*, del tutto equivalenti a quelle governative.

§ 2° caso

Si consideri ora il caso in cui si acquisti una *put* di protezione parziale con prezzo di esercizio (K) inferiore al valore facciale delle passività emesse dall'impresa (F). In questo caso la [63] diventa:

[66] $$B = Fe^{-rT} - put(\max\left[K; A^C\right], F).$$

E' facilmente dimostrabile che a scadenza il *payoff* degli obbligazionisti nei diversi stati di mondo sarà pari a:

A^C<K	K< A^C<F	A^C>F
K	A^C	F

In questo ambito il *pricing* delle passività obbligazionarie sarà quindi pari a:

[67] $$\begin{aligned} B &= Ke^{-rT}\,\mathrm{Prob}\left[A^C(T) < K\right] + A^C\,\mathrm{Prob}^{\S}\left[K < A^C(T) < F\right] + Fe^{-rT}\,\mathrm{Prob}\left[A^C(T) > F\right] = \\ &= Ke^{-rT}\left[1 - N\left(d_2^K\right)\right] + A^C\left[N\left(d_1^K\right) - N\left(d_1^F\right)\right] + Fe^{-rT}N\left(d_2^F\right) \end{aligned}$$

dove:

[68] $$d_1^F = \frac{\ln\left(A^C / F\right) + \left(r + \sigma^2 / 2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{e} \quad d_2^F = d_1^F - \sigma\sqrt{T}.$$

[69] $$d_1^K = \frac{\ln\left(A^C / K\right) + \left(r + \sigma^2 / 2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{e} \quad d_2^K = d_1^K - \sigma\sqrt{T}.$$

In questo caso il valore delle passività obbligazionarie è inferiore a quello delle corrispondenti passività *risk-free*, ma al tempo stesso è superiore al valore delle passività nel caso in cui non si sia accesa nessuna forma di garanzia esterna. Per comprendere meglio la natura della passività obbligazionaria in questo mutato contesto alcune semplici passaggi ci consentono di scrivere la [67] come:

[67 bis] $$\begin{aligned} B &= Fe^{-rT} - \left[Fe^{-rT}N\left(-d_2^F\right) - A^C N\left(-d_1^F\right)\right] + \left[Ke^{-rT}N\left(-d_2^K\right) - A^C N\left(-d_1^K\right)\right] \\ &= B^* - put\left(A^C, F\right) + put\left(A^C, K\right) \end{aligned}$$

La posizione dell'obbligazionista è quindi equivalente a quella di un investitore con una posizione lunga su: a) un titolo *risk-free* e b) una *put* con prezzo di esercizio K, e una posizione corta su una *put* con prezzo di esercizio F.

Si evince che a parità di passività emesse, F, il *credit spread* richiesto dagli investitori sarà inferiore:

[70] $$\eta^C = -\ln\left(\frac{B^* - put(\max(A^C, F), F)}{B^*}\right)\Big/ T.$$

Il miglioramento di *credit spread* grazie all'utilizzo di strumenti di assicurazione *off-balance* (c.d. *contingent capital*) permetta dunque di aumentare il livello di *leverage* dell'intermediario lasciando inalterato il livello di *credit spread* originario.

8. Conclusioni

Questa nota ha mostrato come il rischio e il capitale rappresentino i due lati di una stessa medaglia.

Dalla teoria della finanza aziendale sappiamo che il capitale assolve fondamentalmente due specifiche funzioni: i) il trasferimento della proprietà, ii) il *funding* delle attività, attraverso una combinazione opportuna di debito e capitale.

Nel caso delle banche, si argomenta spesso che il capitale non debba essere considerato come una significativa forma di finanziamento, visto che gli intermediari possono ottenere finanziamento a tassi ben inferiori rispetto al costo del capitale. In alcuni schemi teorici, come ad esempio il *framework* monetarista tradizionale, il capitale è totalmente ignorato considerando il processo di creazione dei depositi e del credito in maniera del tutto meccanica attraverso gli schemi del moltiplicatore creditizio.

In questa nota si è cercato di mostrare come le banche, pur essendo imprese ad alto *leverage*, debbano prestare particolare attenzione all'analisi e alla quantificazione dei rischi sopportati per poter realizzare un'efficiente politica di *capital management*.

Riferimenti bibliografici

ALTMAN, E. I. - Financial Ratios, Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy, Journal of Finance, 189-209, 1968.

ALTMAN, E. I. - Corporate Financial Distress and Bankruptcy, Second Edition, John Wiley & Sons, New York, 1993.

ALTMAN, E. I. - I modelli di previsione delle insolvenze di un contesto di turbolenza e alla luce di Basilea II, Seminario sul rischio di credito, Università Partenope, Napoli, 2004a.

ALTMAN, E. I. - The impact of Basel II on Banks and SMEs., EFDI Seminar on Deposit Insurance and Basel II, Roma, 2004b.

ALTMAN, E. I. e ARMAN, P. - Defaults and Returns in the High Yield Bond Market., Journal of Applied Finance, Spring-Summer, 98-112, 2002.

ALTMAN, E. I., BRADY, B., RESTI, A. e SIRONI, A. - The Link Between Default Rates and Recovery Rates: Implications for Credit Risk Models and Procyclicality., NYU Salomon Center, WP#S-02-9, 2002.

ALTMAN, E. I., RESTI, A. e SIRONI, A. - Analyzing and Explaining Default Recovery Rates, ISDA, 2002.

ALTMAN, E. I. e SAUNDERS A. - Credit Risk Measurement: Developments over the Last 20 Years, Journal of Banking and Finance, vol. 21, 1721-42, 1998.

ALTMAN, E. I. e SAUNDERS A. - The BIS Proposal on Capital Adequacy and Ratings: A Commentary, Working paper, Stern School of Business, New York University, 1999.

ASSOCIAZIONE ITALIANA INTERNAL AUDITORS - “Il ruolo dell’*Internal Auditing* nell’*Enterpise Risk Management*”, settembre 2004.

BARONE, E. - A Unified VaR Approach in Asset & Liability Management: A Synthesis of New Methodologies, Risk Books, December 1998.

BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION - The New Basel Capital Accord., Consultative Document issued for comment by 31 May 2001, 2001.

BEAVER, W., .Financial Ratios as Predictors of Failures., *Empirical Research in Accounting*, selected studies, 77-111, 1966.

BEAVER, W., .Alternative Accounting Measures as Predictors of Failures. *Accounting Review*, 46-53, 1968.

BLACK, F. e COX, J. C. - Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions, Journal of Finance, 351-65, 1976.

BLACK, F. e SCHOLES, M. - The Pricing of Options and Corporate Liabilities., Journal of Political Economy, 81, 637-54, 1973.

BOLLERSLEV, T. - Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, Journal of Political Econometrics, 307-327, 1986.

BOYLE, P.P. - Options: A Monte Carlo Approach, Journal of Financial Economics, 1977.

COMMITTEE OF SPONSORING ORGANIZATIONS OF THE TREADWAY COMMISSION (COSO), *Risk Management –Integrated Framework*: Executive Summary, 2004

CROSBIE, P. J. - Modeling Default Risk., Working Paper, Kmv, 1999.

DALLOCCHIO, M. e SALVI, A. - Finanza d’azienda, Egea, Milano, 2004.

De SERVIGNY, A., and RENALUT, O. - Measuring and Managing Credit Risk, McGraw-Hill Co.Inc. New York, 2004.

DUFFEE, G.R. - Estimating the price of default risk. The Review of Financial Studies, 1999.

DUFFEE, G.R. - Term premia and interest rate forecasts in affine models, Journal of Finance, 2002.

DUFFIE, D. - Black, Merton, and Scholes: Their Central Contribution to Economics., Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University, December 22, 1997.

DUFFIE, D. - Dynamic Asset Pricing Theory, Princeton University Press, 2001.

DUFFIE, D, e LANDO, D. - Term Structures of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information, Econometrica, 2001.

DUFFIE, D., e SINGLETON, K. - Credit Risk, Princeton University Press, 2003.

GORDY, M.B., “Address”, Round Table on The Role of Rating System in the Credit Process, Conference on “Validation of Credit Risk Models”, Ca’ Foscari, Venice, 2004.

ENGLE, R.F. - Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation, Econometrica, 1982.

HULL, J. - Opzioni *Futures* e altri derivati. Il sole 24 ore, 2000.

JORION, P. - Value at Risk, McGraw Hill. 2001.

KNIGHT, F.H. - Risk, Uncertainty and Profit, Houghton Mifflin Co, Boston, 1921.

MAINO, R. e MASERA, R.S. - “Impresa, Finanza, mercato in Italia”, Egea, 2005.

MASERA, R.S. - Intermediari, Mercati e Finanza d’Impresa, Laterza, Bari,1991.

MASERA, R.S. - Il Rischio e le Banche, Il Sole24Ore, Milano, 2001.

MASERA, R.S. - Rischio, Banche, Imprese, Il Sole24Ore, Milano, 2005.

MASERA, R.S. - Core, Mantle and Industry: a monetary perspective of the Basle Capital Accord, John Hicks: One Hundreth Anniversary Workshop, Bologna 2004.

MASERA, R.S. - La corporate governance nelle banche”, Il Mulino, Bologna, 2006.

MATTEN, C. - Managing Bank Capital, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2000.

MERTON, R. C. - Theory of Rational Option Pricing., Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 4, No. 1, (Spring), 141-183, 1973b.

MERTON, R. C. - On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rate, Journal of Finance, vol. 29, May 1974, 449-70.

MERTON R. C. - Operation and Regulation in Financial Intermediation: a Functional Approach, Harvard Business School, Working Paper, no. 93020, 1992.

MERTON R. C. - Financial Innovation and the Management and Regulation of Financial Institutions, Journal of Banking and Finance, n.19, 1995.

MERTON R. C., e BODIE, Z. - Deposit Insurance Reform: a Functional Approach., Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, n. 38, 1993.

MERTON R. C., e BODIE, Z. - A Conceptual Framework for Analyzing the Financial Environment, in AA.VV., The Global Financial System. A Functional Perspective, Harvard Business School Press, Cambridge, 1995.

MERTON R. C., e PEROLD, A. F. - Management of Risk Capital in Financial Firms., Working Paper, Harvard Business School, 1993a.

MERTON R. C., e PEROLD, A. F. - Theory of Risk Capital in Financial Firms., Journal of Applied Corporate Finance, n. 5, 16-32, 1993b.

MOODY.S, - Il modello Risk Calc. elaborato da Moody.s per aziende private: Italia., www.moodyskmv.com, 2003.

SHIMPI, P. - “Integrating Corporate Risk Management”, Swiss Re New Markets, New York, 2001.

SZEGO, G.P. - Risk Measures for the 21st Century, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2004

WICKSELL, J.G.K. - “The influence of the rate of Interest on Commodity Prices”, 1898 Economic Journal, 1907

Appendice 1

A1.1 Relazione tra expected e unexpected losses per una LGD non stocastica

Imponiamo:

(A1.1.1) $$UL_i \equiv \sqrt{V[L_i]}.$$

dove: L_i è la variabile casuale perdita della posizione i-esima.

Segue pertanto che per $EAD_i = 1$ possiamo scrivere:

(A1.1.2) $$V[L_i] = E[L_i^2] - E[L_i]^2.$$

Possiamo inoltre notare che:

(A1.1.3) $$E[L_i^2] = LGD_i^2 \times PD_i.$$

Sostituendo la (A1.1.3) nella (A1.1.2) possiamo scrivere:

(A1.1.4) $$V[L_i] = LGD_i^2 \times PD_i - LGD_i^2 \times PD_i^2 = E[L_i](LGD_i - E[L_i]).$$

Usando la (A1) e rimuovendo l'ipotesi di $EAD_i = 1$ otteniamo infine:

(A1.1.5) $$UL_i = \sqrt{V[L_i]} = EAD_i \times \sqrt{V[L_i]} = EAD_i \times \sqrt{E[L_i](LGD_i - E[L_i])}$$

A1.2 Relazione tra expected e unexpected losses per una LGD stocastica

Per semplificare i calcoli si assuma che la EAD_i non stocastica sia pari a 1. Possiamo quindi scrivere:

(A.1.2.1)

$$E[L_i] = E[LGD_i \times PD_i] = E[LGD_i] \times PD_i = \overline{LGD_i} \times PD_i;$$

dove: $E[LGD_i] \equiv \overline{LGD_i}$.

Imponendo anche in questo caso:

(A1.2.2) $$UL_i \equiv \sqrt{V[L_i]};$$

possiamo scrivere:

(A1.2.3)
$$\begin{aligned} UL_i &= \sqrt{E[L_i - E[L_i]]^2} = E\left[L_i^2 + \overline{LGD_i}^2 \times PD_i^2 - 2L_i \times \overline{LGD_i} \times PD_i\right] = \\ &= \sqrt{E[L_i^2] + \overline{LGD_i}^2 \times PD_i^2 - 2E[L_i] \times \overline{LGD_i} \times PD_i} = \\ &= \sqrt{E[L_i^2] + \overline{LGD_i}^2 \times PD_i^2 - 2(PD_i \times \overline{LGD_i}) \times \overline{LGD_i} \times PD_i} = \\ &= \sqrt{E[L_i^2] - \overline{LGD_i}^2 \times PD_i^2} \end{aligned}.$$

Se notiamo che:

(A1.2.4) $$E\left[\overline{LGD_i}^2\right] = vol_i^2 + \overline{LGD_i}^2;$$

dove:

(A1.2.5) $$vol_i = \sqrt{V[LGD_i]};$$

possiamo riscrivere la (A1.2.3) come:

$$UL_i = \sqrt{E[L_i^2] - \overline{LGD_i}^2 \times PD_i^2} = \sqrt{\left(V(LGD_i) + \overline{LGD_i}^2\right) \times PD_i - \overline{LGD_i}^2 \times PD_i^2} =$$

(A1.2.6) $$= \sqrt{\left(vol_i^2 \times PD_i\right) + \overline{LGD_i}^2 \times PD_i - \overline{LGD_i}^2 \times PD_i^2} =$$

$$= \sqrt{PD_i \times (1 - PD_i) + \overline{LGD_i}^2 + vol_i^2 \times PD_i}$$

Rimuovendo l'ipotesi di $EAD_i = 1$ la (A1.2.6) può essere infine scritta come:

(A1.2.7) $$UL_i = EAD_i \sqrt{PD_i \times (1 - PD_i) + \overline{LGD_i}^2 + vol_i^2 \times PD_i} .$$

Appendice 2

Imponendo rispettivamente:

(A.2.1) $$UL_i \equiv \sqrt{V[L_i]};$$

e

(A.2.2) $$UL_{portfolio} \equiv \sqrt{V[L_{portfolio}]};$$

possiamo scrivere:

(A.2.3) $$UL_{portfolio} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} UL_i UL_j \rho_{ij}} = \sum_{i=1}^{N} UL_i \rho_{iP} .$$

Differenziando la parte sinistra della (A.2.3) otteniamo:

(A.2.4) $$\frac{\partial UL_{portfolio}}{UL_i} = \frac{2UL_i + 2\sum_{j\neq 1}^{N} UL_j \rho_{ij}}{2UL_{portfolio}} .$$

Se si definisce:

(A.2.5) $$RC_i \equiv \frac{\partial UL_{portfolio}}{\partial UL_i} UL_i ;$$

possiamo scrivere:

$$\text{(A.2.6)}\ RC_i = \frac{2UL_i + 2\sum_{j\neq 1}^{N} UL_j \rho_{ij}}{2UL_{portfolio}} UL_i = \frac{\sum_{j\neq 1}^{N} UL_j \times UL_i \times \rho_{ij}}{UL_{portfolio}}.$$

La proprietà additiva dei singoli RC può ora essere facilmente dimostrata:

$$\text{(A.2.7)}\ \sum_{i=1}^{N} RC_i = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j\neq 1}^{N} UL_j \times UL_i \times \rho_{ij}\right)}{UL_{portfolio}} = \frac{UL_{portfolio}^2}{UL_{portfolio}} = UL_{portfolio}.$$